

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ

ОПТИКА



СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ

ОПТИКА

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

под редакцией
Д. В. СИВУХИНА

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов физических специальностей высших учебных заведений



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1977

530.3

C 23

УДК 530.19

Авторы:

**В. Л. ГИНЗБУРГ, Л. М. ЛЕВИН, Д. В. СИВУХИН,
Е. С. ЧЕТВЕРИКОВА, И. А. ЯКОВЛЕВ**

*Гинзбург Виталий Лазаревич,
Левин Лев Михайлович,
Сивухин Дмитрий Васильевич,
Четверикова Елизавета Сергеевна,
Яковлев Иван Алексеевич*

**СВОРНИК ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ
ФИЗИКИ**

Оптика

М., 1977 г., 320 стр. с илл.

Редакторы *Л. И. Гладнева, Н. А. Михалина*

Технический редактор *В. Н. Кондакова*

Корректор *Л. Н. Боровина*

Сдано в набор 17/V 1977 г. Подписано к печати
25/VIII 1977 г. Бумага 84×108^{1/32}. Физ. печ. л.
10. Условн. печ. л. 16,8. Уч.-изд. л. 18,07. Ти-
раж 85 000 экз. Цена книги 55 коп. Заказ №1546.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудо-
вого Красного Знамени Первая Образцовая типо-
графия имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательств, полиграфии и книж-
ной торговли.
Москва, М-54, Валовая, 28.

G 20401—139
053 (02)-77 88-77

© Главная редакция
физико-математической литературы
издательства «Наука», 1977 г.,
с изменениями

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие к четвертому изданию	4	
		Задачи
		Ответы и решения
§ 1. Геометрическая оптика	5	149
§ 2. Фотометрия	35	183
§ 3. Интерференция света	40	187
§ 4. Дифракция света	52	196
§ 5. Элементы голограммии	76	228
§ 6. Поляризация света. Формулы Френеля	82	232
§ 7. Кристаллооптика	90	242
§ 8. Скорость света	107	265
§ 9. Теория относительности и оптика движущихся тел	114	276
§ 10. Давление света	120	289
§ 11. Молекулярная оптика и смежные вопросы из других разделов физики	123	293
§ 12. Тепловое излучение	144	317

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании отдел оптики задачника выходит отдельной книгой. Отдел значительно переработан и дополнен новыми задачами. Как и в предыдущих двух изданиях, эта работа выполнена В. Л. Гинзбургом и Д. В. Сивухиным. Кроме того, в четвертом издании принял участие И. А. Яковлев. Им написан § 5, содержащий 10 задач по голограммии, а также около 25 задач по интерференции, дифракции, поляризации света и кристаллооптике. Отдельные задачи предложены преподавателями кафедры общей физики Московского физико-технического института, кафедры астрофизики и астрономии того же института (руководимой В. Л. Гинзбургом), а также сотрудниками И. А. Яковлева. Подвергся переработке § 7 по кристаллооптике. Кристаллооптика одноосных кристаллов излагается независимо от кристаллооптики двуосных кристаллов. Этим достигается значительное упрощение, так как большинство задач относится именно к кристаллооптике одноосных кристаллов. Значительно пополнены новыми задачами параграфы по теории относительности и молекулярной оптике.

Всем товарищам, способствовавшим улучшению этой книги и пополнению ее новыми задачами, авторский коллектив выражает глубокую благодарность.

Авторы выражают глубокую благодарность доценту Л. А. Спекторову за нелегкий и кропотливый труд по просмотрю и рецензированию рукописи IV части задачника и доценту Д. И. Ибраимову за организацию ее обсуждения на руководимой им кафедре общей физики Киргизского государственного университета.

Д. В. Сивухин

ЗАДАЧИ

§ 1. Геометрическая оптика

1. При освещении непрозрачного диска радиуса r на экране, отстоящем от него на расстоянии l , получается тень радиуса r_1 и полутина радиуса r_2 . Источник света также имеет форму диска, причем прямая, соединяющая центры дисков, перпендикулярна к ним и к плоскости экрана. Определить размер источника света и его расстояние от освещаемого диска.

2. Диаметр фотосферы Солнца равен 1 390 000 км, расстояние Солнца от Земли составляет в среднем 150 000 000 км и меняется незначительно. Расстояние от центра Луны до поверхности Земли меняется от 357 000 до 399 000 км. Когда солнечное затмение бывает полным и когда кольцеобразным, если диаметр Луны равен 3480 км?

3. Объяснить, почему свет от некоторого источника, проходя через отверстие, дает изображение этого источника на экране, помещенном за отверстием, если отверстие мало, и дает изображение этого отверстия, если оно велико.

4. Лучи от Солнца падают на небольшое квадратное зеркало и после отражения попадают на экран. Какую форму имеет освещенная часть экрана и как она меняется с изменением расстояния между зеркалом и экраном?

5. Перед вертикальной квадратной проволочной сеткой помещена длинная узкая горизонтальная щель, освещаемая ярким протяженным источником света. Пройдя через щель и сетку, свет падает на удаленный экран. Описать картину, получаемую на экране. Что произойдет, если повернуть щель вокруг перпендикуляра к плоскости сетки на 90 или 45°? Рассмотреть сетку, изображенную на рис. 1, а, и сетку, изображенную на рис. 1, б.

6. Как изменится картина на экране, если в предыдущей задаче поменять местами щель и сетку?

7. Два зеркала наклонены друг к другу и образуют двугранный угол α . На них падает луч, лежащий в плоскости, перпендикулярной к ребру угла. Показать, что угол δ отклонения этого луча от первоначального направления после отражения от обоих зеркал не зависит от угла падения. Вычислить δ .

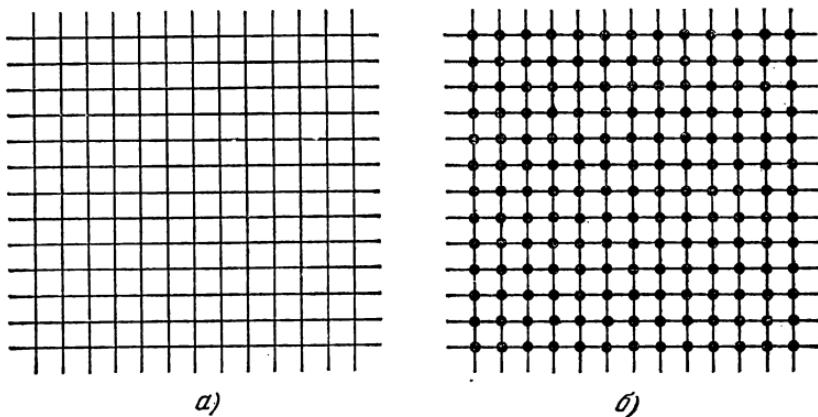


Рис. 1.

8. Записать в векторной форме законы отражения и преломления световых лучей на плоской границе раздела двух прозрачных изотропных сред. Свет падает от среды 1 с показателем преломления n_1 на среду 2 с показателем преломления n_2 . Направления падающего, отраженного и преломленного лучей характеризуются единичными векторами r_0 , r_1 , r_2 . Единичный вектор N нормали к границе раздела направлен от среды 2 к среде 1.

9. Показать, что луч света, последовательно отражающийся от трех взаимно перпендикулярных зеркал, меняет свое направление на обратное.

10. Трехгранная пирамида получена путем срезания угла стеклянного куба с посеребренными гранями. Через основание такой пирамиды попадает световой луч, последовательно отражающийся от трех остальных взаимно перпендикулярных граней. Показать, что выходящий из пирамиды луч меняет свое направление на обратное.

11. Найти все изображения предмета, находящегося между двумя зеркалами, наклоненными друг к другу под углом 60° . Построить ход лучей, дающих изображение пред-

мета после двух последовательных отражений от обоих зеркал.

12. Определить число изображений предмета, помещенного между двумя плоскими зеркалами, образующими друг с другом угол φ , в предположении, что число $m=2\pi/\varphi$ — целое.

13. Световой луч вступает в преломляющую призму через грань AD и последовательно отражается от граней BC и BD , а затем выходит через грань AC , как указано на рис. 2. Луч лежит в плоскости, перпендикулярной к ребрам призмы. Углы B и A призмы равны соответственно α и

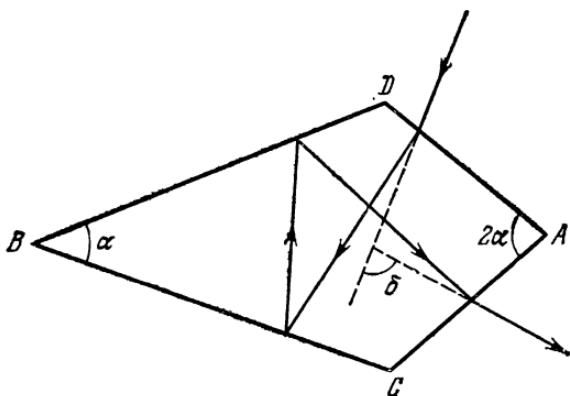


Рис. 2.

2α , а углы C и D равны между собой. Показать, что угол δ отклонения вышедшего луча от первоначального направления не зависит от угла падения. Вычислить угол δ . Будет ли призма при указанном ходе лучей давать спектральное разложение?

14. Объяснить, почему в лунную ночь на поверхности моря видна лунная дорожка, а не изображение лунного диска.

15. Найти величину изображения Солнца, получаемого в рефлекторе с радиусом кривизны 16 м. Диаметр Солнца $1,4 \cdot 10^6$ км, а расстояние от Земли до Солнца $150 \cdot 10^6$ км.

16. Радиус кривизны вогнутого зеркала 40 см. Найти положение объекта, при котором его изображение — действительное и увеличенное в два раза. Найти такое

положение, при котором изображение — мнимое и увеличенное в два раза.

17. Для измерения фокусного расстояния зеркала в 10 см от него поместили зажженную свечу. Четкое изображение свечи получилось на экране, отстоящем от зеркала на расстоянии 30 см. Найти фокусное расстояние f зеркала.

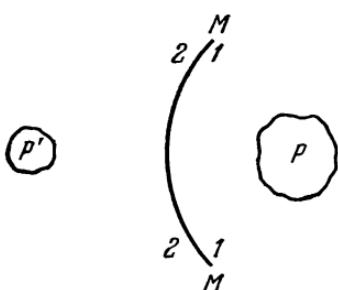


Рис. 3.

18. Доказать геометрически и аналитически, что если сферическое зеркало MM (рис. 3), посеребренное со стороны 1, отображает предмет P в P' , то посеребренное со стороны 2, оно отображает предмет P' в P .

19. Найти форму зеркальной поверхности, отражающей параллельные лучи так, что они кажутся исходящими из одной точки за зеркалом.

20. Сосуд с ртутью равномерно вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega = 1 \text{ c}^{-1}$. Поверхность ртути принимает вогнутую форму и используется как зеркало. Определить фокусное расстояние этого зеркала.

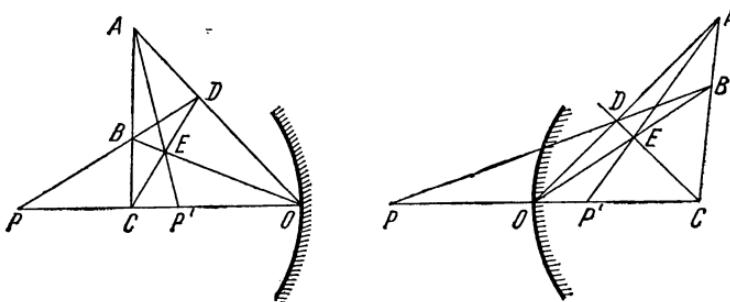


Рис. 4.

21. Доказать геометрически, что если луч света, исходящий из точки A , попадает в точку B после отражения от плоского зеркала, то длина пути этого луча меньше, чем длина любого другого пути, проходящего от A к зеркалу, а затем к B .

22. Доказать, что изображение точки в сферическом зеркале можно построить следующим способом. Из произвольной точки A проводим прямые AO и AC , соединяющие эту точку с вершиной O и центром кривизны C (рис. 4). Из точ-

ки P проводим прямую PD , пересекающую прямые AO и AC в точках D и B . Прямая AP' , соединяющая точку A с точкой пересечения диагоналей BO и CD , пересечет оптическую ось в точке P' , являющейся изображением точки P .

23. Показать, что если луч света, исходящий из точки A , попадает в точку B после преломления на плоской границе раздела двух сред, то оптическая длина этого луча меньше оптической длины любого другого пути, соединяющего A и B .

24. Вывести формулу сферического зеркала и формулу тонкой линзы из принципа таутохронизма¹⁾.

25. При падении на плоскую границу двух сред луч частично отражается, частично преломляется. При каком угле падения ϕ отраженный луч перпендикулярен к преломленному лучу?

26. Доказать, что если световой луч проходит несколько сред, разделенных плоскопараллельными границами, то направление выходящего луча зависит только от направления входящего луча и от показателей преломления первой и последней сред.

27. Определить, насколько плоскопараллельная стеклянная пластинка толщины $d=10$ см смещает в сторону луч света, падающий на нее под углом $\phi=70^\circ$. Показатель преломления стекла $n=1,5$.

28. Человек, стоящий на берегу пруда, смотрит на камень, находящийся на его дне. Глубина пруда $h=1$ м. На каком расстоянии h' от поверхности воды получится изображение камня, если луч зрения составляет с нормалью к поверхности воды угол $\phi=60^\circ$? Показатель преломления воды $n=1,33$.

29. Под стеклянной пластинкой толщины $d=15$ см лежит маленькая крупинка. На каком расстоянии l от верхней поверхности пластинки образуется ее видимое

1) В этой книге принято следующее правило знаков. Все расстояния, отсчитываемые от зеркала или линзы (или других точек, принимаемых за начало отсчета) в направлении распространения света, считаются положительными, а против направления распространения света,— отрицательными. Если падающий свет распространяется слева направо, то это правило знаков совпадает с правилом знаков, принятым в аналитической геометрии. Радиусы кривизны сферических поверхностей отсчитываются в направлении от сферической поверхности к центру кривизны. Фокусные расстояния, напротив, отсчитываются в направлении от фокусов к линзе или зеркалу (а в случае толстых линз или систем линз в направлении от фокусов к соответствующим главным плоскостям).

изображение, если луч зрения перпендикулярен к поверхности пластинки, а показатель преломления стекла $n=1,5$?

30. Плоская стеклянная пластина толщины 3 мм рассматривается в микроскоп. Сначала микроскоп устанавливают для наблюдения верхней поверхности пластины, а затем смещают тубус микроскопа вниз до тех пор, пока не будет отчетливо видна нижняя поверхность пластины (для удобства наблюдения на поверхностях пластины сделаны метки). Смещение тубуса оказалось 2 мм. Найти показатель преломления пластины n .

31. Предмет помещен на расстоянии $l_1=15$ см от плоскопараллельной стеклянной пластины. Наблюдатель рассматривает его через пластины, причем луч зрения нормален к ней. Найти расстояние изображения предмета l_2 от ближайшей к наблюдателю поверхности пластины. Толщина пластины $d=4,5$ см. Показатель преломления стекла $n=1,5$.

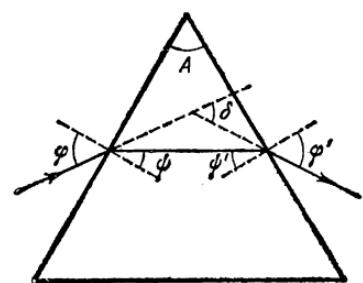


Рис. 5.

32. Как сместится фокус фотоаппарата, если внутрь аппарата на пути лучей (перпендикулярно к оптической оси) поместить плоскопараллельную стеклянную пластины толщины $d=6$ мм с показателем преломления $n=1,5$? (Объектив сильно задиафрагмирован.)

33. Предмет помещен на оси вогнутого зеркала дальше его фокуса. Между фокусом и зеркалом помещена плоскопараллельная стеклянная пластина толщины d с показателем преломления n так, что ось зеркала перпендикулярна к пластинке. Показать, что введение пластины смещает изображение так же, как перемещение зеркала на $d(n-1)/n$ по направлению к предмету.

34. Показать, что для призмы с преломляющим углом A угол отклонения луча δ связан с углами падения ϕ и ψ' и с углами преломления ψ и ϕ' (рис. 5) формулой

$$\frac{\sin \{(A+\delta)/2\}}{\sin (A/2)} = \frac{n \cos \{(\psi-\psi')/2\}}{\cos \{(\phi-\phi')/2\}}.$$

35. Показать, что наименьшее отклонение δ параллельного пучка в призме происходит при симметричном ходе лучей в призме. Связать угол наименьшего отклонения δ с

показателем преломления n вещества призмы и с преломляющим углом A призмы.

36. Чему равен угол наименьшего отклонения δ для линии D натрия в призме с преломляющим углом 60° ? Для линии D показатель преломления стекла призмы $n=1,62$.

37. Световой луч после прохождения через призму испытывает отражение от плоского зеркала. Показать, что при симметричном ходе луча через призму угол отклонения отраженного луча от первоначального направления не зависит от показателя преломления призмы.

38. Цилиндрический стакан с жидкостью поставлен на монету, рассматриваемую сквозь боковую стенку стакана. Указать наименьшую возможную величину показателя преломления n жидкости, при котором монета не видна.

39. С каким углом α нужно взять трапециoidalный сосуд с водой $ABCD$ (рис. 6), чтобы сквозь его боковую стенку не было видно предмета, подложенного под дно сосуда? Показатель преломления воды $n=1,33$. Дно сосуда имеет форму прямоугольника.

40. Луч света преломляется в призме, находясь в плоскости, перпендикулярной к преломляющему ребру призмы. Показать, что если относительный показатель преломления n призмы больше единицы, а угол падения остается постоянным, то отклонение луча возрастает с возрастанием преломляющего угла призмы. Показать также, что при тех же условиях максимальный преломляющий угол призмы, при котором луч может выйти из нее, равен

$$A = \arcsin \frac{\sin \varphi}{n} + \arcsin \frac{1}{n}.$$

41. Вычислить угол наименьшего отклонения δ для призмы с очень малым преломляющим углом A с учетом членов второго порядка малости (относительно A).

42. Написать выражение для угловой дисперсии призмы в области наименьшего отклонения. Найти угол, на который разойдутся два луча по выходе из призмы, если при падении на нее они были параллельны. Показатель преломления призмы для первого луча, испытавшего наименьшее

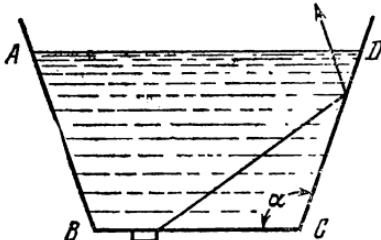


Рис. 6.

отклонение, равен 1,500, а для другого 1,501. Преломляющий угол призмы 60° .

43. Воспользовавшись приведенными ниже данными относительно дисперсии кварца, определить угловую дисперсию (в угл. с/Å) шестидесятиградусной кварцевой призмы в различных частях спектра.

Интервал	$\lambda, \text{ \AA}$	n
1	7685	1,5391
2	5893	1,5442
3	4861	1,5497
4	4100	1,5565
5	3034	1,5770
6	2537	1,5963
	1988	1,6509

44. Подсчитать, какая получится линейная дисперсия (в $\text{мм}/\text{\AA}$), если в спектрографе с призмой, описанной в предыдущей задаче, использовать камеру с объективом, имеющим фокусное расстояние $f=50$ см (для интервалов, указанных в предыдущей задаче).

45. В длинный сосуд с плоскопараллельными стенками, наполненный жидкостью, опущена стеклянная призма так, что ее основание лежит на дне сосуда, как это изображено на рис. 7. Кривые зависимости показателя преломления от длины волны для жидкости и стекла показаны на рис. 8. Указать, что произойдет с лучом белого света, входящим в сосуд и падающим на призму параллельно ее основанию; разложится ли он в спектр, и как пойдут желтый, синий и красный лучи?

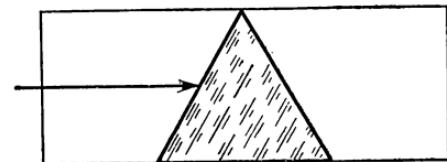


Рис. 7.

Кривые зависимости показателя преломления от длины волны для жидкости и стекла показаны на рис. 8. Указать, что произойдет с лучом белого света, входящим в сосуд и падающим на призму параллельно ее основанию; разложится ли он в спектр, и как пойдут желтый, синий и красный лучи?

46. Оптические длины лучей от одного положения волнового фронта до другого одинаковы. Исходя из этого и

принимая во внимание, что лучи перпендикулярны к волновым фронтам, показать, что угловое увеличение, даваемое зрительной трубой, «установленной на бесконечность», равно отношению ширины пучков света до и после прохождения их через трубу.

47. Если рассматривать удаленные предметы через призму, то, вообще говоря, они будут казаться искаженными. Одно из искажений состоит в том, что изображение вытяну-

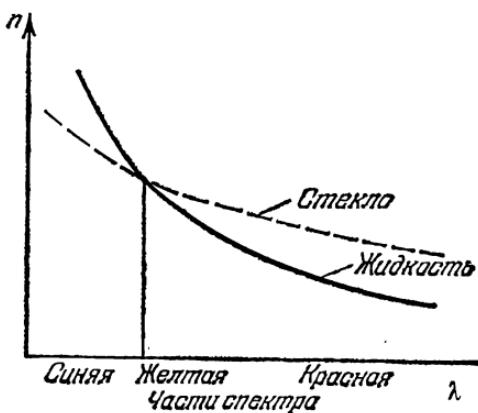


Рис. 8.

то или сплюснуто в направлении, перпендикулярном к ребру призмы. Как надо держать призму, чтобы указанного искажения не было?

48. Как с помощью двух стеклянных призм сконструировать «зрительную трубу» для рассматривания удаленных предметов, дающую их подобные изображения с произвольным увеличением?

49. Используя результат решения задачи 44, доказать, что увеличение зрительной трубы равно отношению фокусного расстояния объектива к фокусному расстоянию окуляра.

50. Стеклянный тонкостенный шар наполнен водой ($n=4/3$). Наблюдатель смотрит вдоль диаметра шара на крупинку, перемещающуюся вдоль этого же диаметра. Как изменяется положение изображения крупинки, если она от удаленного по отношению к наблюдателю конца диаметра перемещается к ближнему концу? Диаметр шара $D=10$ см.

51. Если надеть очки, стекла которых имеют форму менисков с вогнутыми задними поверхностями, то часто наряду с обычными можно видеть сильно уменьшенные прямые

изображения ярких удаленных предметов. Объяснить это явление.

52. Может ли двояковыпуклая линза с показателем преломления $n > 1$ действовать как зрительная труба, предназначенная для рассматривания удаленных предметов? Какие она будет давать изображения — прямые или обратные? Какова должна быть толщина линзы d , если радиусы кривизны передней и задней сферических поверхностей ее равны соответственно R_1 и R_2 ? Чему равно угловое увеличение N ?

53. Какой должна быть толстая стеклянная линза с показателем преломления $n > 1$, чтобы она действовала как зрительная труба, дающая прямые увеличенные изображения удаленных предметов с угловым увеличением N ? Чему должна равняться толщина d такой линзы, если радиусы кривизны передней и задней сферических поверхностей ее равны соответственно R_1 и R_2 ? Как связано угловое увеличение N с радиусами кривизны R_1 и R_2 ?

54. Матовое стекло фотографического аппарата установлено так, что резким выходит изображение предмета, находящегося на расстоянии 5 м. До какого диаметра D нужно задиафрагмировать объектив с фокусным расстоянием 20 см, чтобы не было заметной нерезкости в изображении предметов, находящихся на 0,5 м ближе снимаемого (нерезкость считать незаметной, если размытость деталей не превышает 0,1 мм)?

55. Найти фокусное расстояние f двояковыпуклой тонкой линзы, ограниченной сферическими поверхностями с радиусами $R_1 = 25$ мм и $R_2 = 40$ мм; показатель преломления стекла линзы $n = 1,5$.

56. Линза с фокусным расстоянием $f = 10$ см сделана из стекла с показателем преломления $n = 1,5$. Найти фокусное расстояние f' линзы, помещенной в воду ($n' = 4/3$).

57. Линза с показателем преломления $n = 1,53$ опущена в сероуглерод ($n' = 1,63$). Как изменится фокусное расстояние линзы по сравнению с фокусным расстоянием ее в воздухе?

58. С помощью тонкой собирающей стеклянной линзы с показателем преломления $n = 3/2$ получено действительное изображение предмета на расстоянии 10 см от линзы. После того как предмет и линзу погрузили в воду, не изменяя расстояния между ними, изображение получилось на расстоянии 60 см от линзы. Найти фокусное расстояние f линзы, если показатель преломления воды $n' = 4/3$.

59. Фокусное расстояние объектива зрительной трубы $f_1=60$ см, а окуляра $f_2=4$ см. Показатель преломления стекла объектива и окуляра $n=3/2$. Труба погружается в воду, заполняющую ее внутреннюю часть. Каким объективом из того же сорта стекла следует заменить объектив трубы, чтобы в нее можно было рассматривать удаленные предметы в воде? Чему будет при этом равно увеличение трубы, если показатель преломления воды $n'=4/3$?

60. Галилеева труба 9-кратного увеличения имеет длину 40 см. После того как объектив и окуляр трубы заменили

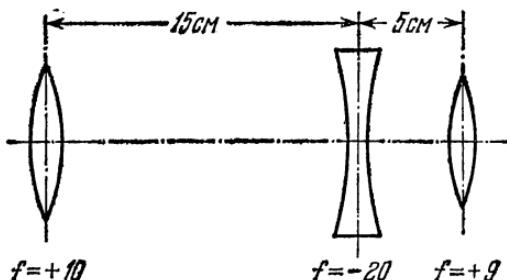


Рис. 9.

собирающими линзами, труба стала давать то же увеличение. Определить фокусные расстояния f'_1 и f'_2 этих линз, а также фокусные расстояния f_1 и f_2 объектива и окуляра галилеевой трубы.

61. Зрительная труба с фокусным расстоянием объектива $f=50$ см установлена на бесконечность. На какое расстояние Δl надо передвинуть окуляр трубы, чтобы ясно видеть предметы на расстоянии 50 м?

62. Как должен быть устроен глаз животного, чтобы оно могло одинаково хорошо видеть удаленные предметы в воздухе и в воде без изменения аккомодации?

63. Изображение предмета, находящегося на расстоянии 10 см от тонкой линзы, — прямое и увеличенное в 2 раза. Определить фокусное расстояние линзы f .

64. На систему линз, изображенных на рис. 9, падает слева параллельный пучок света. Найти положение точки схождения этого пучка после прохождения системы.

65. Найти изображение точки, которая находится на расстоянии 10 см слева от крайней левой линзы системы, изображенной на рис. 10.

66. Микроскоп имеет объектив с фокусным расстоянием $f_1=1$ см и окуляр с фокусным расстоянием $f_2=3$ см, расстоя-

ние между ними $d=20$ см. На каком расстоянии l_1 должен находиться объект, чтобы окончательное изображение получилось на расстоянии $l_2=25$ см от глаза (что является минимальным расстоянием ясного зрения)? Какое при этом получится линейное увеличение α ?

67. Доказать, что если линза находится перед глазом и движется в сторону, то наблюдателю кажется, что предмет, рассматриваемый через линзу, движется в ту же сторону, что и линза, если линза — рассеивающая, и в противоположную, если линза — собирающая.

П р и м е ч а н и е. При этом собирающая линза используется как лупа: предмет помещается между фокусом

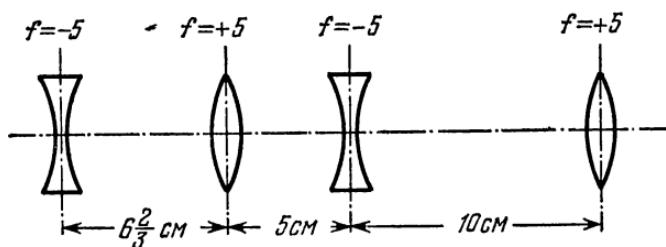


Рис. 10.

и линзой, получается прямое изображение. Если же, отодвинув собирающую линзу достаточно далеко от глаза, рассматривать через нее удаленные предметы, то получаются обратные изображения их. В этом случае при смещении линзы в сторону изображение смещается в ту же сторону.

68. Показать, что наименьшее расстояние между двумя оптически сопряженными относительно собирающей линзы точками равно $4f$, где f — фокусное расстояние линзы.

69. Собирающая линза дает изображение некоторого объекта на экране. Высота изображения равна a . Оставляя неподвижным экран и объект, начинают двигать линзу к экрану и находят, что при втором четком изображении объекта высота изображения равна b . Найти действительную высоту предмета h .

70. Расстояние от лампочки до экрана $L=50$ см. Линза, помещенная между ними, дает четкое изображение лампы на экране при двух положениях, расстояние между которыми $l=10$ см. Найти фокусное расстояние f линзы.

71. Фокусное расстояние линзы f приравнивается расстоянию от нее до изображения очень далекой лампы. Како-

во должно быть расстояние l лампы до линзы, чтобы ошибка в определении фокусного расстояния не превышала $p\%$?

72. Вогнутое зеркальце гальванометра имеет фокусное расстояние 1 м. Для наблюдения отклонений желательно применить зрительную трубу (субъективный отсчет), для чего нужно вплотную перед зеркальцем поставить линзу, делающую всю систему эквивалентной плоскому зеркалу. Найти фокусное расстояние линзы.

73. При наблюдении отклонений зеркального гальванометра применяется система, изображенная на рис. 11 (так

называемый объективный отсчет). Перед плоским зеркальцем гальванометра M помещают линзу L . Свет от осветителя S , пройдя линзу L , отразившись от зеркальца M и пройдя вторично линзу L , дает действительное изображение на шкале N . С каким фокусным расстоянием f нужно взять линзу L , чтобы осветитель S и шкала N , расположенные близко друг к другу, находились на расстоянии 1,5 м от гальванометра. Линзу считать весьма близкой к зеркальцу M .

74. В вогнутое зеркало, лежащее горизонтально, налито немного воды. Зеркало дает действительное изображение предмета на экране на расстоянии 54 см от зеркала. При приближении экрана к зеркалу изображение появляется вновь на расстоянии 36 см от зеркала. Определить радиус кривизны зеркала R и расстояние l предмета от него, если показатель преломления воды $n=4/3$.

75. Фотографическим аппаратом, объектив которого имеет фокусное расстояние 12 см при растяжении 20 см, требуется сфотографировать предмет, находящийся на расстоянии 15 см от объектива. Какую линзу нужно добавить к объективу, чтобы изображение вышло резким при максимально возможном растяжении аппарата?

76. Если точка P' является оптическим изображением точки P , то, как известно, оптические длины всех лучей, соединяющих эти точки, одинаковы. Пусть изображение P' получается путем отражения от плоского зеркала. Тогда, как показывает рис. 12, длина ломаной PBP' больше длины ломаной PAR' . Как согласовать эти два утверждения?

77. Найти уравнение анаберрационной поверхности вращения, разделяющей две однородные среды с показателями

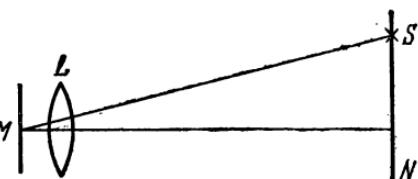


Рис. 11.

ми преломления n и n' , для пары сопряженных точек P и P' , лежащих на оси вращения, из которых точка P находится в бесконечности¹⁾.

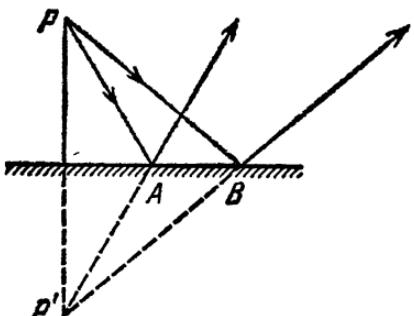


Рис. 12.

Исследовать случаи: 1) $n'^2 > n^2$; 2) $n'^2 < n^2$; 3) $n'^2 = n^2$.

78. Исходя непосредственно из закона преломления Снеллиуса и пользуясь геометрическими свойствами эллипса и гиперболы, доказать, что: 1) пучок световых лучей, падающих на эллипсоид вращения и параллельных его оси, собирается в заднем фокусе эллипсоида, если показатель преломления эллипсоида относительно окружающей среды $n = 1/e$, где e — эксцентриситет эллипсоида; 2) пучок световых лучей, падающих на одну из полостей двуполостного гиперболоида вращения и параллельных его оси, после преломления превращается в расходящийся пучок лучей, продолжения которых точно пересекаются в переднем фокусе гиперболоида, если показатель преломления гиперболоида относительно окружающей среды $n = 1/e$, где e — эксцентриситет гиперболоида. (Ср. с предыдущей задачей.)

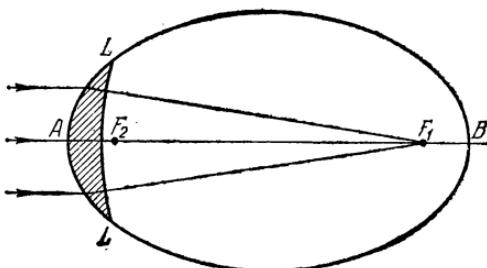


Рис. 13.

79. Показать, что линза, ограниченная эллипсоидом вращения $BLAL$ с фокусами F_1 и F_2 (рис. 13) и сферой

¹⁾ Точки P и P' мы называем анаберрационными, если все лучи, вышедшие из P , после отражения или преломления на некоторой поверхности S собираются в P' . Поверхность S для такой пары точек называется анаберрационной. Обычно для этих понятий используется термин «апланатический». Мы не делаем этого, называя апланатическими только такие анаберрационные точки, которые удовлетворяют условию синусов (см. задачу 159).

с центром в F_1 , собирает падающий на нее параллельный пучок в фокусе F_1 , если показатель преломления ее $n = AB/F_1F_2$. Лучи падают параллельно оси эллипсоида.

Указание. См. предыдущую задачу или задачу 77.

80. Показать, что линза, ограниченная плоскостью AB и гиперболоидом вращения CDE (рис. 14), рассеивает падающие на нее лучи, параллельные осям гиперболоида, так, что по выходе из линзы их продолжения точно пересекаются в переднем фокусе гиперболоида, если показатель преломления линзы равен эксцентриситету гиперболоида.

Указание. См. задачу 77 или 78.

81. Поверхность вращения, разделяющая две однородные среды с показателями преломления n и n' и обладающая тем свойством, что световые лучи, исходящие из одной определенной точки P , лежащей на оси вращения, точно сходятся в другой точке P' , также лежащей на оси вращения, называется картезианским овалом. Найти уравнение сечения этой поверхности плоскостью, проходящей через ось вращения PP' . Исследовать, в каких случаях эта кривая переходит в кривую второго порядка.

82. Вейерштрас дал следующий геометрический способ построения преломленного луча на поверхности сферы. Пусть сфера KL радиуса R (рис. 15) с показателем преломления n' находится в однородной среде с показателем преломления n . Построим две концентрические сферы с радиусами $OP = R n/n'$ и $OQ = R n'/n$. Продолжим падающий луч SK до его пересечения со второй сферой в точке Q . Соединим Q с центром сферы O прямой линией. Последняя пересечет первую сферу в точке P . Тогда прямая KP будет преломленным лучом. Доказать это построение. Показать также, что точки P и Q образуют пару апланатических точек. (Ср. с предыдущей задачей.)

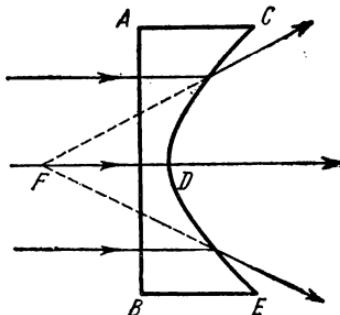


Рис. 14.

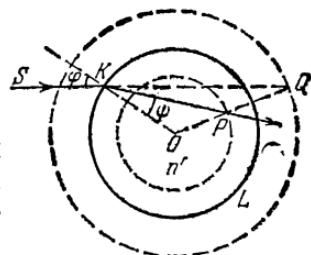


Рис. 15.

83. Пользуясь тем, что для сферической поверхности есть пара апланатических точек, построить апланатическую линзу и указать для нее апланатические точки.

84. У двояковыпуклой тонкой линзы серебрится одна из поверхностей. Найти фокусное расстояние f полученного таким образом зеркала. Радиус кривизны чистой поверхности R_1 , радиус кривизны посеребренной поверхности R_2 .

85. Две одинаковые плоско-выпуклые тонкие линзы с показателем преломления n посеребрены; одна с плоской стороны, другая с выпуклой. Найти отношение фокусных расстояний f_1 и f_2 полученных сложных зеркал, если свет в обоих случаях падает с непосеребренной стороны.

86. Изображение светящегося объекта, получающееся отражением от собирающей тонкой линзы, может быть приведено в совпадение с самим объектом при двух положениях последнего: когда расстояние от объекта до линзы равно 20,0 см и когда оно равно 7,91 см (оба положения с одной и той же стороны линзы). Фокусное расстояние линзы 37,7 см. Определить тип линзы. Найти радиусы кривизны R_1 и R_2 ее поверхностей и показатель преломления стекла n .

87. Сферическая поверхность радиуса R отделяет среду с показателем преломления n (пространство предметов) от среды с показателем преломления n' (пространство изображений). Ограничивааясь параксиальными лучами, найти в приближении параксиальной оптики связь между координатами точки-объекта x, y, z и координатами точки-изображения x', y', z' . За ось X принять главную оптическую ось, за начало координат — точку пересечения ее с границей раздела.

П р и м е ч а н и е. Относительно правила знаков см. сноска на стр. 9.

88. Пользуясь результатами предыдущей задачи, показать, что для центрированной оптической системы в приближении параксиальной оптики координаты точки-объекта x, y, z связаны с координатами точки-изображения x', y', z' формулами коллинеарного соответствия:

$$x' = \frac{Ax + B}{ax + b}, \quad y' = \frac{Cy}{ax + b}, \quad z' = \frac{Cz}{ax + b},$$

где A, B, C, a, b — постоянные для данной оптической системы, зависящие от выбора начал координат. За начало координат в пространстве предметов принимается произвольная точка, лежащая на главной оптической оси сис-

темы, а за начало координат в пространстве изображений — другая (или та же самая) произвольная точка той же оси.

89. Выразить координаты фокальных, главных и узловых точек центрированной оптической системы и ее фокусные расстояния через постоянные A, B, C, a, b . (См. предыдущую задачу.)

90. Какой вид принимают формулы коллинеарного соответствия (см. задачу 88), если за начала координат принять: 1) главные точки (координаты относительно этой системы обозначим греческими буквами ξ, η, ζ); 2) фокальные точки (координаты относительно этой системы обозначим большими латинскими буквами X, Y, Z)?

91. Найти положения главных плоскостей и фокусные расстояния для центрированной системы, состоящей из одной сферической преломляющей поверхности (см. задачу 87).

92. Показать, что в любой центрированной системе фокусные расстояния f и f' связаны соотношением

$$f'/f = -n'/n,$$

где n — показатель преломления пространства предметов, а n' — пространства изображений.

Указание. Воспользоваться формулой $\eta'/\eta = -f\xi'/f'\xi$, теоремой Лагранжа — Гельмгольца и определением главных плоскостей.

93. Показать, что продольное увеличение в центрированной оптической системе равно квадрату поперечного, если показатели преломления пространства предметов и пространства изображений одинаковы.

Указание. Воспользоваться формулой Ньютона $XX' = ff'$.

94. Две центрированные оптические системы соединены вместе в одну центрированную систему. Фокусные расстояния первой системы равны f_1 и f'_1 , а второй системы f_2 и f'_2 . Расстояние F'_1F_2 переднего фокуса F_2 второй системы от заднего фокуса F'_1 первой системы равно δ (оно называется оптическим интервалом двух систем и считается положительным, если F'_1F_2 совпадает по направлению с направлением падающего света, и отрицательным в противоположном случае). Найти положения главных и фокальных точек сложной системы и ее фокусные расстояния.

95. Две тонкие линзы с фокусными расстояниями f_1 и f_2 находятся на расстоянии l друг от друга, образуя

центрированную систему. Найти фокусное расстояние f этой системы, а также положения ее главных плоскостей.

96. Систему двух тонких линз, описанную в предыдущей задаче, требуется заменить одной «эквивалентной» тонкой линзой, которая при любом положении объекта давала бы такое же по величине изображение его, как и описанная система двух линз. Найти фокусное расстояние и положение «эквивалентной» линзы.

97. Найти фокусное расстояние f центрированной системы, состоящей из двух тонких линз с фокусными расстояниями f_1 и f_2 , которые отстоят друг от друга на расстоянии l , если пространство между линзами заполнено водой.

98. Используя результаты решения задач 91 и 94, найти положения главных плоскостей и фокусные расстояния центрированной системы, состоящей из двух сферических поверхностей с радиусами кривизны R_1 и R_2 , разделяющими однородные среды с показателями преломления n_1 , n_2 , n_3 .

99. Найти положения главных плоскостей толстой линзы, имеющей форму шара радиуса R . Определить фокусные расстояния f и f' и положения фокальных точек такой линзы, когда она сделана: 1) из воды ($n_{\text{в}}=4/3$); 2) стекла ($n_{\text{ст}}=-3/2$). При каком показателе преломления фокальные точки не выйдут наружу?

100. Радиус стеклянного шара ($n=1,5$) $R=4$ см. 1) Найти расстояние x' от центра шара до изображения предмета, который расположен в 6 см от поверхности шара. 2) Найти увеличение изображения.

101. В каких случаях фокусное расстояние толстой линзы не зависит от ее толщины и точно совпадает с фокусным расстоянием тонкой линзы, обладающей равной кривизной поверхностей? Будет ли в этом случае положение фокуса относительно линзы зависеть от ее толщины?

102. В каком случае двояковыпуклая линза, изготовленная из стекла с показателем преломления $n=1,5$ и находящаяся в воздухе, будет рассеивающей?

103. В каком случае двояковыпуклая линза, изготовленная из вещества с показателем преломления, большим показателя преломления окружающей среды, будет действовать как плоскопараллельная пластиинка?

104. Две одинаковые плоско-выпуклые линзы расположены плоскими сторонами друг к другу и находятся на небольшом расстоянии. Показать, что фокусное расстояние в этом случае больше, чем в случае контактного соприкосновения линз.

105. С одной стороны двояковыпуклой тонкой линзы, сделанной из стекла ($n=1,52$), находится вода ($n'=1,33$), с другой — воздух. Радиусы кривизны обеих поверхностей равны 20 см. Найти положения главных и фокальных плоскостей и узловых точек системы.

106. Радиус кривизны R сферической поверхности стеклянной ($n=1,52$) плоско-выпуклой линзы равен 26 см; толщина линзы 3,04 см. Вычислить фокусное расстояние f линзы и найти положение изображения объекта, находящегося на расстоянии 75 см от ближайшей поверхности линзы и расположенного со стороны: 1) выпуклой поверхности; 2) плоской поверхности.

107. Найти фокусное расстояние f и положения главных плоскостей двояковыпуклой толстой линзы, для которой $n=1,5$, $R_1=10$ см, $R_2=4$ см, $d=2$ см.

108. Определить положения главных плоскостей, фокальных точек и фокусное расстояние системы двух тонких линз, изображенной на рис. 16.

109. Всегда ли предмет и его изображение видны из оптического центра толстой линзы под одинаковыми углами?

П р и м е ч а н и е. Оптическим центром толстой линзы называется изображение передней (задней) главной точки при преломлении на передней (задней) поверхности линзы.

110. Собирающей или рассеивающей будет вогнуто-выпуклая линза, обе поверхности которой имеют одинаковые радиусы кривизны? Определить положения главных плоскостей и фокусное расстояние линзы, если ее толщина равна d , радиус кривизны каждой из поверхностей R , а показатель преломления $n>1$.

111. Преломляющие поверхности линзы являются концентрическими сферическими поверхностями. Большой радиус кривизны равен R , толщина линзы d , а показатель преломления $n>1$. Собирающей или рассеивающей будет эта линза? Определить положения главных плоскостей и фокусное расстояние линзы.

112. При каком положении бесконечно малого трехмерного объекта его изображение, даваемое центрированной оптической системой, подобно самому объекту?

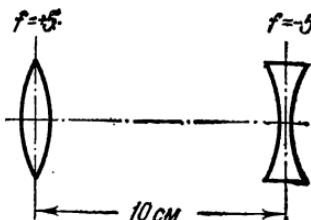


Рис. 16.

Указание. Для того чтобы изображение малого объемного объекта было подобно самому объекту, необходимо и достаточно, чтобы поперечное увеличение по абсолютной величине равнялось осевому увеличению. Исходя из уравнения центрированной системы в форме Ньютона: $XX' = ff'$, определить осевое увеличение. Сравнивая его с поперечным увеличением, нетрудно найти решение задачи.

113. Б. Б. Голицын предложил следующий способ определения показателей преломления жидкостей. Исследуемая жидкость наливается в цилиндрическую стеклянную трубку, на внешней поверхности которой наносятся два штриха, параллельные осям трубы, а с противоположной стороны трубы измеряется кажущееся расстояние между ними y_1 . Пусть y — истинное расстояние между штрихами, R_1 — внешний, R_2 — внутренний радиусы трубы; n_1 , n_2 , n — показатели преломления воздуха, стекла и исследуемой жидкости соответственно. Показать, что показатель преломления жидкости можно вычислить по формуле

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n_2} \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{1}{2n_1 R_1} \left(1 + \frac{y}{y_1} \right).$$

114. Для определения увеличения зрительной трубы, окуляром которой является собирающая линза, Рамсден предложил следующий метод. Трубу, установленную на бесконечность, закрепляют на оптической скамье. Вывернув объектив, помещают на его место диафрагму, имеющую, например, форму ромба. Окуляр дает действительное изображение этой диафрагмы, которое можно получить на экране. Пусть L — длина диагонали ромба-диафрагмы, а l — его изображения. Показать, что увеличение трубы равно L/l .

115. Метод Рамсдена (см. предыдущую задачу) непосредственно неприменим для определения увеличения галилеевой трубы, так как окуляром ее является рассеивающая линза. Для определения увеличения галилеевой трубы можно поступить следующим образом. Установив галилееву трубу на бесконечность, закрепляют ее на оптической скамье. За галилеевой трубой помещается другая зрительная труба известного увеличения, также установленная на бесконечность и обращенная окуляром в сторону галилеевой трубы. За второй трубой помещается экран. Затем объектив галилеевой трубы вывинчивается и заменяется диафрагмой. Перемещая экран, получают на нем действительное изобра-

жение диафрагмы. Показать, что увеличение галилеевой трубы равно

$$N_1 = \frac{D_1}{D_2} N_2,$$

где D_1 — размер диафрагмы, D_2 — размер ее изображения, а N_2 — увеличение второй трубы.

116. Для определения фокусного расстояния собирательной линзы Бессель предложил следующий метод. По обе стороны линзы на неизменном расстоянии A друг от друга помещаются предмет и экран. Вообще говоря, существуют два положения предмета, при которых получаются четкие изображения его на экране (указать, когда это возможно). Пусть a — расстояние между этими положениями, а e — расстояние между главными плоскостями линзы. Найти выражение для фокусного расстояния линзы, пренебрегая квадратами отношения e/A . Каким образом можно определить величину e ?

117. Найти формулу, связывающую расстояние u от источника до вогнутого зеркала радиуса R с расстоянием v от зеркала до точки A пересечения оси зеркала с лучом, исходящим из источника и отражающимся от зеркала на расстоянии h от оси. Пренебречь членами, содержащими h в степени выше второй.

118. Точечный источник расположен на расстоянии u от вогнутого сферического зеркала с радиусом кривизны R . Найти продольную сферическую aberrацию лучей, исходящих из источника и отражающихся от зеркала на расстоянии h от оси. Пренебречь членами, содержащими h в степени выше второй.

Указание. См. предыдущую задачу.

119. Радиус вогнутого сферического зеркала равен 50 см. Точечный источник расположен на оси зеркала на расстоянии 100 см от него. Вычислить продольную aberrацию лучей, отражающихся от зеркала на расстояниях 3, 6, 9, 12 см от оси.

120. Найти продольную сферическую aberrацию для параллельного пучка у сферического зеркала диаметром 1 м с фокусным расстоянием 10 м.

121. Какой диаметр будут иметь изображения звезд, получаемых в зеркале, описанном в предыдущей задаче?

122. Для параксиальных лучей формула, связывающая расстояние u от источника до преломляющей сферической поверхности радиуса R с расстоянием v от изображения

до той же поверхности, имеет вид

$$\frac{n}{v} - \frac{1}{u} = \frac{n-1}{R}$$

(см. задачу 87). Показать, что для лучей, пересекающих поверхность на расстоянии h от оси, расстояние изображения от сферической поверхности v' связано с u формулой (с точностью до h^4)

$$\frac{n}{v'} - \frac{1}{u} = \frac{n-1}{R} + \frac{n-1}{n^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{u} \right)^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{n+1}{u} \right) \frac{h^2}{2}.$$

123. Найти продольную сферическую aberrацию в тонкой линзе для лучей, пересекающих линзу на расстоянии h от оси.

Указание. См. предыдущую задачу.

124. Найти продольную сферическую aberrацию для параллельного пучка, падающего на плоско-выпуклую стеклянную линзу ($n=1,5$), в случаях: 1) когда линза обращена выпуклой стороной к пучку; 2) когда линза обращена к пучку плоской стороной. Фокусное расстояние линзы 1 м. Диаметр линзы 10 см. Найти также поперечную aberrацию в обоих случаях.

125. Найти фокусные расстояния для красных, желтых и синих лучей, а также продольную хроматическую aberrацию (разность фокусных расстояний для крайних видимых лучей) двояковыпуклой линзы с радиусами кривизны $R_1=R_2=R=981,4$ мм, сделанной из стекла со следующими показателями преломления:

Лучи	$\lambda, \text{ \AA}$	n
Красные	6682	1,4835
Желтые	5270	1,4907
Синие	4046	1,4997

126. При визуальных наблюдениях мы обычно фиксируем изображение, образованное лучами средней части видимого спектра, т. е. желтыми лучами. Считая, что диаметр отверстия линзы, описанной в предыдущей задаче, равен 5 см, найти диаметры D кругов рассеяния, образованных красными и синими лучами при фокусировке на желтое изображение.

127. Найти увеличение N лупы или окуляра (рассматривая их как толстые центрированные системы) в зависимости от положения предмета и глаза наблюдателя. Координаты предмета и его изображения относительно фокальных точек X и X' ; координата, определяющая положение глаза относительно заднего фокуса окуляра, равна a . При каком положении предмета увеличение не будет зависеть от положения глаза наблюдателя? При каком положении глаза увеличение не будет зависеть от положения предмета? Чему равно увеличение, когда глаз аккомодирован на наименьшее расстояние ясного зрения $L=25$ см?

П р и м е ч а н и е. Увеличением лупы или окуляра называется отношение угла, под которым предмет виден через лупу, к углу, под которым он был бы виден невооруженным глазом, если бы был помещен от последнего на наименьшем расстоянии ясного зрения.

128. В чем смысл ахроматизации окуляров в отношении только фокусных расстояний без одновременной ахроматизации в смысле совмещения главных плоскостей?

129. Показать, что две тонкие линзы, сделанные из одного и того же материала, образуют ахроматизированную в отношении фокусного расстояния систему (для всех длин волн), если расстояние между ними $l=(f_1+f_2)/2$.

130. Один из типов окуляра Кельнера представляет собой ахроматизированную в отношении фокусного расстояния систему двух тонких собирающих линз, расстояние между которыми l равно фокусному расстоянию f_1 первой линзы. Найти фокусное расстояние f_2 второй линзы, фокусное расстояние f всего окуляра и положения его главных плоскостей.

131. Окуляр Гюйгенса представляет собой ахроматизированную в отношении фокусного расстояния систему двух тонких плоско-выпуклых линз, обращенных выпуклыми поверхностями в сторону падающего света. Для уменьшения сферической aberrации Гюйгенс подобрал расстояние между линзами так, чтобы световые лучи, падающие на окуляр параллельно главной оптической оси, испытывали одинаковые угловые отклонения при преломлении в первой и второй линзах¹⁾. Найти соотношение между фокусными расстояниями f_1 и f_2 обеих линз, расстояние l между ними,

¹⁾ В современных типах окуляра Гюйгенса это условие обычно не выполняется.

положения главных плоскостей окуляра и его фокусное расстояние f .

132. Почему в окуляре Кельнера, описанном в задаче 130 видны соринки на поверхности первой линзы, а в окуляре Гюйгенса не видны?

133. Окуляр Рамсдена состоит из двух плоско-выпуклых линз с одинаковыми фокусными расстояниями f_1 , обращенных выпуклыми сторонами навстречу друг к другу. Расстояние между линзами равно двум третям их фокусного расстояния. Найти фокусное расстояние и положения главных плоскостей окуляра Рамсдена. Где следует поместить крест окулярных нитей, чтобы его изображение совпало с плоскостью изображения предмета?

134. Написать условие ахроматизации двух линз, сложенных вплотную. Какое заключение о фокусных расстояниях обеих компонент ахроматической линзы можно сделать из этого условия?

135. Какая линза в ахроматическом объективе телескопа, бинокля и т. п., состоящем из двояковыпуклой и плоско-вогнутой линз, делается из крона и какая из флинта?

136. Рассчитать ахроматический плоско-выпуклый склеенный объектив с фокусным расстоянием $f=1$ м, изготовленный из крона ($n_1=1,5179$, коэффициент дисперсии $v_1=-60,2$) и флинта ($n_2=1,6202$, коэффициент дисперсии $v_2=36,2$). Одна из линз двояковыпуклая.

П р и м е ч а н и е. Коэффициентом дисперсии называют отношение $v = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$, где буквы D , F , C относятся к соответствующим фраунгоферовым линиям.

137. Написать условие, при котором одна линза будет ахроматизирована относительно фокусных расстояний для двух каких-либо участков спектра.

138. Показать, что толстая одиночная ахроматическая линза, описанная в предыдущей задаче, будет собирающей, если она двояковыпуклая, и рассеивающей, если она выпукло-вогнутая.

П р и м е ч а н и е. Линза называется собирающей, если ее фокусное расстояние в пространстве предметов $f = -f'$ положительное. В противоположном случае линза называется рассеивающей (см. сноску на стр. 9).

139. Найти толщину d и фокусное расстояние f толстой ахроматической двояковыпуклой линзы, обе поверхности которой имеют один и тот же радиус кривизны $R=10$ см.

Линза изготовлена из стекла со следующими показателями преломления: $n_{kp}=1,636$, $n_c=1,682$.

140. Источник света проектируется конденсорной линзой на щель спектрографа; при этом изображение источника увеличено в k раз. Показать, что при условии полного заполнения объектива коллиматора светосила конденсора α_1 и светосила объектива коллиматора α_2 связаны соотношением $\alpha_1=(1+k)\alpha_2$.

141. При фотографировании спектров фотографическую пластинку приходится ставить не перпендикулярно к оптической оси объектива спектрографа. Вычислить, какой нужно задать угол перекоса β пластинке и в какую сторону, чтобы получить весь спектр резким, если известно, что показатель преломления оптического стекла, из которого сделан объектив, для линии C $n_c=1,502$, для линии F $n_F=1,510$, угловая дисперсия призмы спектрографа между теми же линиями равна $\alpha=3^\circ$.

Указание. Можно считать, что если обе линии C и F будут сфокусированы, то и весь спектр будет резким. При решении следует еще иметь в виду, что одноцветные пучки выходят из призмы параллельными.

142. Световой луч падает на однородный шар с показателем преломления n . Может ли преломленный луч испытывать полное внутреннее отражение внутри шара?

143. По теории Декарта радуга образуется в результате отражения солнечных лучей внутри водяных капель. Лучи, претерпевшие внутри капли одно отражение, дают так называемую главную радугу или радугу первого порядка. Лучи, претерпевшие двукратное отражение, дают побочную радугу или радугу второго порядка. Угловые размеры радуги можно определить из требования, чтобы угол отклонения светового луча при отражении и преломлении внутри капли был минимален, так как в этом случае малому изменению угла отклонения соответствуют большие изменения угла падения, а следовательно, получается максимальная интенсивность света, отраженного внутри капли. Под каким углом ϕ должен падать световой луч на поверхность капли, чтобы он испытал наименьшее отклонение при однократном и двукратном отражении внутри капли? Найти угловой радиус α главной и побочной радуг для красного и фиолетового света. Показатели преломления воды равны $n_{kp}=1,329$, $n_\Phi=1,343$.

Примечание. Декартова теория радуги основана на геометрической оптике и объясняет лишь некоторые

основные черты явления радуги. Для объяснения всех особенностей этого явления необходимо учитывать дифракцию света на водяных каплях.

144. Теория Декарта допускает существование радуг высшего порядка, когда число отражений света внутри капли равно трем, четырем и т. д. Предполагая, что солнечный луч претерпевает внутри капли N отражений, найти угол падения ϕ (рис. 17), которому соответствует экстремальное

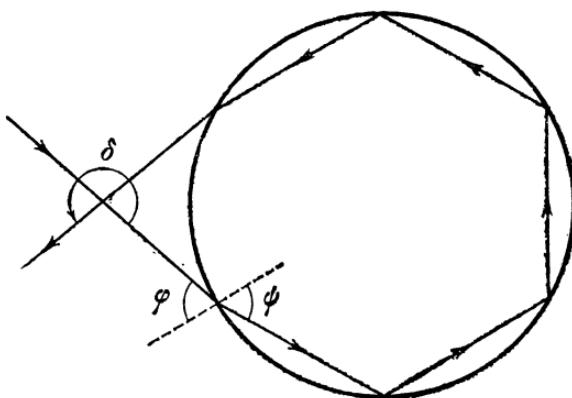


Рис. 17.

отклонение вышедшего из капли луча от первоначального направления. Показать, что экстремальное отклонение всегда соответствует минимуму угла отклонения. Определить угол наименьшего отклонения δ и угловой радиус α для радуг третьего, четвертого, пятого и шестого порядков, считая, что показатель преломления воды $n=1,33$. Объяснить, почему эти радуги и радуги высших порядков никогда не наблюдаются.

145. Гало, т. е. белые слабо окрашенные круги вокруг Солнца (или Луны), наблюдается тогда, когда небо покрыто тонкой пеленой перисто-слоистых или высоких слоистых облаков. Гало происходит вследствие преломления световых лучей в беспорядочно ориентированных ледяных кристалличках, имеющих форму правильных шестиугольных призм (гексагональная система). Найти видимый угловой радиус гало и описать характер распределения окраски в них. Показатель преломления льда $n=1,31$.

146. Исходя из закона преломления света, показать, что радиус кривизны r светового луча при его распространении в прозрачной изотропной среде с медленно изменяющимся показателем преломления определяется выражением

$$\frac{1}{r} = \frac{d}{dN} (\ln n),$$

где производная берется по направлению главной нормали N к лучу.

147. Считая, что показатель преломления n воздуха зависит только от расстояния до центра Земли, вывести формулу для вычисления астрономической рефракции с учетом кривизны земной поверхности.

148. Показать, что если пренебречь кривизной земной поверхности (это можно делать, когда звезда находится не слишком близко к горизонту), то астрономическая рефракция не будет зависеть от закона изменения показателя преломления воздуха с высотой, а только от значений n_0 и α_0 . Показать, что для светила, находящегося не слишком близко к горизонту, рефракцию можно вычислять по приближенной формуле

$$\alpha_\infty - \alpha_0 = (n_0 - 1) \operatorname{tg} \alpha_0.$$

149. Найти рефракцию $\alpha_\infty - \alpha_0$, если видимое зенитное расстояние светила $\alpha_0 = 70^\circ$, а показатель преломления воздуха у поверхности Земли $n_0 = 1,000293$.

150. Считая, что разность $n - 1$ пропорциональна плотности воздуха, и предполагая, что плотность воздуха меняется с высотой, согласно барометрической формуле (изотермическая атмосфера), вывести выражение для рефракции $\alpha_\infty - \alpha_0$ с учетом кривизны земной поверхности.

151. Найти рефракцию $\alpha_\infty - \alpha_0$ для изотермической атмосферы, предполагая, что видимое зенитное расстояние $\alpha_0 = 90^\circ$; относительная молекулярная масса воздуха $\mu = 28,8$; ускорение свободного падения $g = 981 \text{ см/с}^2$; температура $T = 273 \text{ К}$; газовая постоянная $R = 8,3143 \cdot 10^7 \text{ эрг/(моль} \cdot \text{К)}$; радиус Земли $r_0 = 6367 \text{ км}$; показатель преломления воздуха у Земли $n_0 = 1,000293$.

152. Градиент показателя преломления воздуха вблизи земной поверхности составляет около $3 \cdot 10^{-10} \text{ см}^{-1}$. Определить радиус кривизны светового луча, когда он распространяется в атмосфере в горизонтальном направлении. Каков должен быть градиент, чтобы луч света, выйдя в

горизонтальном направлении, описал окружность вокруг земного шара?

153. При каких градиентах температуры воздуха у земной поверхности возможен нижний мираж? Будет ли при таких градиентах равновесие воздуха конвективно устойчивым? (См. задачу 133 ч. II этого задачника.)

154. Абсолютным оптическим инструментом называется такой инструмент, который с помощью широких пучков дает строго стигматическое изображение каждой точки пространства предмета. Максвелл привел пример такого инструмента, названного им «рыбьим глазом». «Рыбий глаз» Максвелла представляет собой неограниченную среду с непрерывно изменяющимся показателем преломления, обладающую сферической симметрией. В такой среде световой луч имеет форму окружности независимо от того, из какой точки и по какому направлению он вышел.

Найти закон изменения показателя преломления «рыбьего глаза» в зависимости от расстояния r от центра симметрии. Показать, что все световые лучи, выйдя из произвольной точки P , описав окружности, снова соберутся в некоторой точке P' . Показать также, что увеличение, даваемое «рыбьим глазом», равно отношению показателя преломления в том месте, где находится предмет, к показателю преломления в том месте, где получается изображение.

155. Найти минимальный радиус кривизны окружности, которую может описать световой луч в «рыбьем глазе».

Указание. См. предыдущую задачу.

156. Можно ли осуществить «рыбий глаз» Максвелла в электронной оптике, предполагая, что электроны должны двигаться в электростатическом поле в вакууме?

Указание. Воспользоваться аналогией между геометрической оптикой и классической механикой движения частицы в консервативном поле сил.

157. Пользуясь аналогией между классической механикой и геометрической оптикой, получить выражение для кривизны луча в неоднородной изотропной среде.

158. Исходя из формулы для кривизны луча в неоднородной среде и используя аналогию между классической механикой и геометрической оптикой, показать, что радиус кривизны ρ траектории электрона в электрическом поле определяется формулой

$$1/\rho = -E_N/2V,$$

где E_N — слагающая электрического поля вдоль главной нормали к траектории, а V — электростатический потен-

циал, нормированный так, что при нулевом потенциале скорость электрона обращается в нуль.

159. Для повышения разрешающей способности и увеличения яркости изображений в микроскопе необходимо применять широкогольные пучки лучей. Рассматриваемый объект в микроскопе можно считать малым, плоским и помещенным на главной оптической оси, перпендикулярной к плоскости самого объекта. Какому условию должен удовлетворять объектив, чтобы давать изображения всех точек объекта без сферической aberrации?

160. Объектив микроскопа, удовлетворяющий условию синусов, помещен на оптической скамье. Перед передней апланатической точкой P его находится сетка кривых, начертенная на листе бумаги. Сетка рассматривается глазом, помещенным во вторую (заднюю) апланатическую точку P' . Найти форму рассматриваемых кривых, если глаз видит их изображение в виде прямоугольной сетки прямых. Расстояние сетки a от точки P велико по сравнению с диаметром входного зрачка системы.

161. На рис. 18 приведен в натуральную величину рисунок, которым можно пользоваться при испытании объективов микроскопов по способу Аббе. Удалив окуляр микроскопа, помещают такой рисунок перед передней апланатической точкой объектива на вполне определенном расстоянии a от нее. Глаз наблюдателя помещается во второй апланатической точке его. Если изображение рисунка получается в виде квадратной сетки, то объектив удовлетворяет условию синусов. Измерив нужные размеры на рис. 18, определить расстояние a от передней апланатической точки объектива, на котором следует помещать этот рисунок при испытании объективов по методу Аббе. (См. предыдущую задачу.)

162. Доказать теорему: Пусть точка P' является стигматическим изображением точки P , даваемым оптической системой с помощью сколь угодно широких пучков лучей. Для того чтобы бесконечно малый элемент плоскости, проходящей через P , изображался стигматически широкими пучками лучей, необходимо и достаточно, чтобы

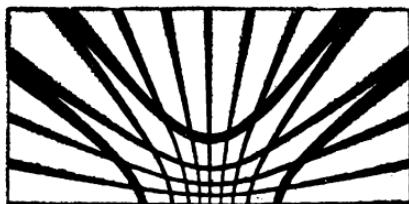


Рис. 18.

выполнялось условие косинусов для двух бесконечно малых непараллельных отрезков, лежащих в этой плоскости и проходящих через точку P .

П р и м е ч а н и е. Теорема или условие косинусов состоит в следующем. Пусть точка P' является стигматическим изображением точки P . Соединим эти точки произвольным лучом, направления которого в точках P и P' определяются единичными векторами s и s' . Пусть Q и Q' — две точки, бесконечно близкие к P и P' соответственно. Для того чтобы точка Q изображалась стигматически в виде точки Q' , необходимо и достаточно, чтобы разность $nsl - n's'l'$, где $\mathbf{l} = \overrightarrow{PQ}$, $\mathbf{l}' = \overrightarrow{P'Q'}$ не зависела от s , т. е. от направления луча, соединяющего P и P' . Здесь n — показатель преломления в пространстве предметов, а n' — в пространстве изображений. Среда, в которой распространяются световые лучи, предполагается изотропной, но она может быть неоднородной.

163. Доказать теорему: Пусть бесконечно малая площадка стигматически изображается оптической системой. Пусть, далее, \mathbf{l}_1 и \mathbf{l}_2 — бесконечно малые непараллельные отрезки, пересекающиеся в пределах площадки и лежащие в ее плоскости. Если эти отрезки лежат тангенциальны в поле инструмента, то рассматриваемая площадка изображается оптической системой с сохранением подобия. При этом оптическая длина любого отрезка, лежащего на площадке, равна оптической длине сопряженного с ним отрезка.

П р и м е ч а н и е. Говорят, что световой луч лежит в поле инструмента, если он действительно проходит через диафрагмы из пространства предметов в пространство изображений. Говорят также, что отрезок кривой лежит тангенциально в поле инструмента, если все лучи, касающиеся этого отрезка, лежат в поле инструмента.

164. Доказать теорему: Пусть оптическая система стигматически изображает некоторую конечную поверхность, и пусть AB — линия, лежащая на этой поверхности. Если через каждую точку этой линии можно провести по крайней мере два луча, касающихся изображаемой поверхности и лежащих в поле инструмента, то оптическая длина линии AB равна оптической длине ее изображения $A'B'$.

165. Доказать теорему: Пусть точка P' является стигматическим изображением точки P . Для того чтобы бесконечно малый элемент объема в окрестности точки P изображался стигматически, необходимо и достаточно, чтобы вы-

полнялось условие косинусов для трех бесконечно малых отрезков, проходящих через точку P и не лежащих в одной плоскости.

166. Доказать теорему: Стигматическое изображение элементов объема всегда происходит с сохранением подобия. При этом линейное увеличение равно n/n' , так что оптическая длина предмета всегда равна оптической длине его изображения. В частности, эта теорема справедлива для изображений, даваемых абсолютным оптическим инструментом. (См. задачу 154.)

167. Доказать теорему: В абсолютном оптическом инструменте оптическая длина луча, соединяющего сопряженные точки, одна и та же для всех пар сопряженных точек.

168. Доказать теорему: Если показатели преломления n и n' пространств предметов и изображений постоянны, то абсолютный оптический инструмент является телескопической системой, в которой всякая прямая изображается в виде прямой. В частном случае, когда $n=n'$, увеличение, даваемое инструментом, равно единице.

169. Доказать теорему: Пусть пространства предметов и изображений имеют постоянные показатели преломления n и n' и граничат друг с другом вдоль некоторой поверхности, на которой световые лучи испытывают преломления. Тогда такая оптическая система не может быть абсолютным оптическим инструментом. Невозможен также абсолютный оптический инструмент с постоянными n и n' , в котором изображение получается путем конечного числа преломлений на преломляющих поверхностях или путем комбинации конечного числа преломлений с отражениями.

170. Доказать теорему: Если n и n' постоянны, то единственным абсолютным оптическим инструментом с конечным числом отражающих или преломляющих поверхностей является плоское зеркало или система плоских зеркал.

§ 2. Фотометрия

171. На столе лежит книга на расстоянии 1 м от основания перпендикуляра, опущенного из лампы на плоскость стола. Лампа может перемещаться только вверх и вниз. На какой высоте h над столом следует ее подвесить, чтобы освещенность книги была наибольшей?

172. В фотометрической практике считается, что закон обратных квадратов можно применять, если расстояние

фотометра от измеряемого источника не меньше пятикратного размера последнего. Показать для случая круглого равномерно светящегося диска (т. е. диска, поверхностная яркость которого одинакова во всех направлениях) радиуса R , что на расстоянии $10R$ от его центра освещенность на перпендикулярно расположенной площадке, вычисленная из закона обратных квадратов, получается с погрешностью в 1%.

173. Какой кривой светораспределения должна обладать лампа, чтобы давать равномерную освещенность на плоском столе, над которым она подвешена?

174. Полый шар из молочного стекла освещен в одном месте параллельным пучком света, сечение которого мало по сравнению с диаметром шара. Стенки шара рассеивают свет по закону ЛамBERTA. Каково будет распределение яркости по поверхности шара?

175. Действительное изображение, образованное вогнутым зеркалом, рассматривается на белом экране. Как зависит яркость изображения от отверстия и фокусного расстояния зеркала?

176. Объяснить, почему два одинаковых фонаря, находящихся на разных, но небольших расстояниях, часто кажутся нам одинаково яркими. Всегда ли это справедливо и когда наблюдаются отступления?

177. Доказать, что поверхностная яркость источника в данном направлении B_ϕ равна отношению освещенности E удаленной площадки, перпендикулярной к этому направлению, к телесному углу Ω , под которым источник виден с этой площадки.

178. Какая получится освещенность E площадки, если источником света служит бесконечная плоскость, параллельная этой площадке, причем поверхностная яркость источника B всюду одинакова и не зависит от направления?

179. Какая получается освещенность E на горизонтальной площадке, освещаемой небесной полусферой, если считать яркость неба повсюду равномерной и равной B ?

180. В параллельном пучке расположен двугранный прямой угол (рис. 19) так, что яркость граней одинакова. Коэффициенты отражения граней k_1 и k_2 . Найти углы граней с параллельным пучком α_1 и α_2 . Границы рассеивают свет по закону ЛамBERTA.

181. Освещенность, получаемая при нормальном падении солнечных лучей на поверхность Земли, около 10^5 лк. Считая, что излучение Солнца подчиняется закону ЛамBERTA, и пренебрегая поглощением света в атмосфере, определ-

лить яркость Солнца, если известно, что радиус земной орбиты $R=1,5 \cdot 10^8$ км, а диаметр Солнца $D=1,4 \cdot 10^6$ км¹).

182. Какую освещенность E следует создать на белом листе бумаги с коэффициентом отражения $k=0,85$, чтобы его яркость B была $3 \cdot 10^4$ кд/м²? Можно считать, что бумага рассеивает свет по закону Ламберта.

183. Освещенность, получаемая при нормальном падении солнечных лучей на поверхность Земли, составляет приблизительно $E_0=100\,000$ лк.

Какова освещенность E изображения Солнца, даваемого свободной от aberration линзой с диаметром $D=5$ см и фокусным расстоянием $f=10$ см? Угловой диаметр Солнца $\alpha=30'$.

184. Объективом малой светосилы фотографируется предмет с уменьшением в два раза. Как изменится освещенность на фотографической пластинке при съемке в тех же условиях с увеличением, равным единице?

Указание. Ссылка на малую светосилу объектива означает, что диаметр объектива мал по сравнению с расстоянием до объекта, и следовательно, при подсчете телесного угла площадь линзы можно считать равной площади соответствующего шарового сегмента.

185. Под объективом микроскопа (рис. 20) лежит объект P . Диаметр объектива $D=3$ мм, его расстояние от покровного стекла объекта весьма мало, показатель преломления покровного стекла $n=1,5$, а толщина $d=0,2$ мм. Во сколько раз увеличится яркость изображения, если между объективом и покровным стеклом ввести иммерсию с тем же показателем преломления, что и показатель преломления покровного стекла? Предполагается, что в обоих случаях объект помещен в жидкость, которая имеет такой же показатель преломления, как и покровное стекло.

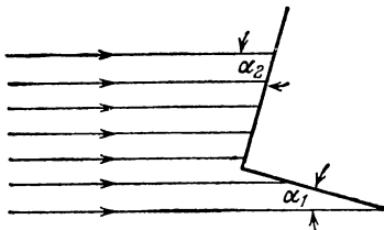


Рис. 19.

¹⁾ Основной светотехнической величиной является сила света I . Ее единица — кандела (старое название — свеча). Кандела (кд) есть сила света при температурном излучении площадки в $1/60$ см² поверхности абсолютно черного тела в перпендикулярном направлении при температуре затвердевания платины (2042 К). Световой поток определяется как произведение силы света на телесный угол, в котором он распространяется. Единица светового потока — люмен (лм), или кандела на стерadian (кд/ср). Единица освещенности — люкс (лк), или лм/м². Единица яркости — кандела на квадратный метр (кд/м²).

П р и м е ч а н и е. При отсутствии иммерсии в объектив попадут от объекта только те лучи, которые падают на поверхность покровного стекла под углом меньшим, чем угол полного внутреннего отражения. Поэтому телесный угол, под которым объект виден из точки P , уменьшается, если иммерсия отсутствует. В точном расчете следовало бы принять во внимание отражение света на границах раздела воздуха со стеклом и учитывать зависимость коэффициента отражения от угла падения согласно формулам Френеля.

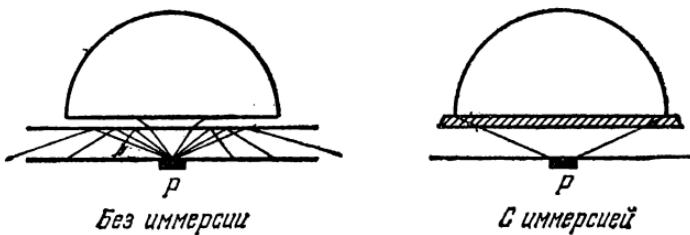


Рис. 20.

Если это отражение не учитывать, как предлагается сделать в рассматриваемой задаче, то вычисленное увеличение яркости изображения окажется несколько меньше истинного.

186. Определить отношение яркости изображения B' , полученного в апланатической системе, к яркости объекта B , излучение которого подчиняется закону Ламберта. Показатели преломления в пространствах предметов и изображений одинаковы.

187. Действительное изображение, образованное собирающей линзой, рассматривается сначала непосредственно, а затем на белом экране. Как зависит в обоих случаях яркость изображения от диаметра линзы?

188. Найти яркость изображения Луны, наблюдаемой в телескоп с объективом диаметром в 75 мм, при увеличениях: 1) 20-кратном; 2) 25-кратном; 3) 50-кратном. Яркость Луны, видимой невооруженным глазом, принять за единицу. Диаметр зрачка глаза считать равным 3 мм.

189. Какого диаметра должен быть объектив трубы с пятидесятикратным увеличением, чтобы при пользовании ею освещенность изображения на сетчатке была не меньше освещенности, получаемой при рассматривании предмета невооруженным глазом? Диаметр зрачка глаза равен 2 мм. Потерями света в трубе пренебречь.

190. Диаметр объектива астрономического телескопа равен 18 см. Считая, что коэффициент пропускания всей оптической системы телескопа равен 0,5 и что невооруженный глаз различает звезды шестой величины, найти: 1) величину наиболее слабых звезд, которые могут быть видимы с помощью этого телескопа; 2) наивыгоднейшее увеличение для наблюдения звезд; 3) величину звезд, которые будут видимы при увеличении в 10 раз. Диаметр зрачка глаза равен 3 мм.

П р и м е ч а н и е. Возрастанию звездной величины на единицу соответствует уменьшение ее видимой яркости в $\sqrt[5]{100} \approx 2,5$ раза.

191. Какой величины звезду можно увидеть в телескоп с диаметром объектива 2 м? Невооруженный глаз различает звезды шестой величины. Диаметр зрачка глаза равен 3 мм. Потерями света пренебречь.

192. Как известно, яркость изображения в оптической системе не зависит от его увеличения. Почему же при наблюдении в микроскоп изображение кажется менее ярким, если применить большее увеличение? Найти: 1) освещенность изображения в микроскопе с числовым апертурой 1 (сухая система) и увеличением 625; 2) освещенность изображения в микроскопе с числовым апертурой 1,5 (иммерсия с $n=1,5$) и увеличением 1500. Освещенность объекта принять за единицу. Расстояние ясного зрения равно 25 см, диаметр зрачка глаза считать равным 2 мм. Потерями света в микроскопе пренебречь.

193. Объективы коллиматора и камеры спектрографа имеют одинаковые диаметры; фокусные расстояния их могут быть различными. При помощи конденсора достигнуто освещение щели, при котором объектив коллиматора полностью заполнен светом. Показать, что при таких условиях светосила прибора зависит только от объектива камеры.

194. Плотность потока энергии видимого излучения свечи на расстоянии 1 м от нее равна 6 эрг/(с·см²). Предполагая, что при горении масса свечи уменьшается на 8,5 г в час и что удельная теплота сгорания спермацета 5800 кал/г, найти к. п. д. свечи как источника света.

195. Зная, что механический эквивалент света в узкой спектральной области, соответствующей максимуму чувствительности глаза ($\lambda=5550 \text{ \AA}$), равен 0,00160 Вт/лм, оценить к. п. д. мощной газонаполненной лампы накаливания, потребляющей мощность 0,5 Вт на 1 кд. Ориентировочно

можно принять, что средняя чувствительность глаза в спектральной области, занимаемой излучением лампы, вдвое меньше максимальной¹⁾.

196. Найти среднюю напряженность электрического поля излучения Солнца на Земле, принимая для солнечной постоянной значение 2 кал/(см²·мин) и пренебрегая поглощением в атмосфере.

П р и м е ч а н и е. Солнечной постоянной называется средний поток солнечной радиации, приходящейся на 1 см² земной поверхности, перпендикулярной к направлению излучения, в 1 мин (при отсутствии поглощения в атмосфере).

197. Пользуясь данными предыдущей задачи, определить напряженность H магнитного поля электромагнитной волны, приходящей на Землю от Солнца.

198. Какова амплитуда напряженности H магнитного поля электромагнитной волны в месте изображения Солнца, получаемого в фотоаппарате при светосиле объектива, равной 1/4? Угловой диаметр Солнца $\approx 0,01$ рад. Потерями энергии излучения в атмосфере и объективе пренебречь.

§ 3. Интерференция света

199. Составить уравнение плоской волны, нормаль к которой параллельна единичному вектору $n = (\alpha, \beta, \gamma)$. Какой вид принимает это уравнение для монохроматической волны?

200. Составить уравнение волны, излучаемой: 1) точечным источником (сферическая волна); 2) бесконечной нитью (цилиндрическая волна).

201. Показать, что если разность фаз двух складываемых колебаний беспорядочно меняется во времени, то средняя по времени энергия результирующего колебания равна сумме энергий исходных колебаний.

У к а з а н и е. Считать, что за время наблюдения все значения разности фаз равновероятны.

202. В каком случае две электромагнитные волны одинаковой частоты складываются всегда (т. е. при любых фазовых соотношениях) так, что интенсивность разультирующего колебания I равна сумме интенсивностей исходных колебаний I_1 и I_2 ?

¹⁾ Более точно задачу можно решить, зная распределение энергии в спектре и пользуясь кривой видности человеческого глаза. См. Г. С. Ландсберг, Оптика, изд. 5-е, § 8, «Наука», 1976.

203. Три колебания, происходящие вдоль одной и той же прямой, имеют одинаковую амплитуду и частоту. Какая получится средняя интенсивность при сложении этих колебаний, если их фазы независимо и беспорядочно меняются, принимая значения 0 или π ?

204. Направления распространения двух плоских волн одной и той же длины λ составляют друг с другом малый угол ϕ . Волны падают на экран, плоскость которого приблизительно перпендикулярна к направлению их распространения. Написав уравнения обеих плоских волн и сложив поля этих волн, показать, что расстояние Δx между двумя соседними интерференционными полосами на экране определяется выражением $\Delta x = \lambda/\phi$.

205. Как изменится выражение для Δx в предыдущей задаче, если интерферирующие лучи падают на экран наклонно?

206. Найти длину волны λ монохроматического излучения, если в опыте Юнга расстояние первого интерференционного максимума от центральной полосы $x=0,05$ см. Данные установки (рис. 21): $a=5$ м, $d=0,5$ см.

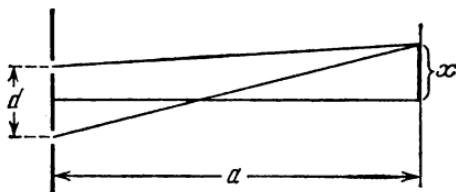


Рис. 21.

207. На пути одного луча в интерференционной установке Юнга стоит трубка длиной $l=2$ см с плоскопараллельными стеклянными основаниями и наблюдается интерференционная картина, когда эта трубка наполнена воздухом. Затем трубка наполняется хлором и при этом наблюдается смещение интерференционной картины на $N=20$ полос. Вся установка помещена в термостат, поддерживающий постоянную температуру. Наблюдения производятся со светом линии D натрия ($\lambda=5890$ Å). Принимая показатель преломления воздуха $n=1,000276$, вычислить показатель преломления хлора. В какую сторону смещаются полосы интерференции при наполнении сосуда хлором?

208. Определить угол α между зеркалами Френеля (рис. 22), если расстояние Δx между полосами интерферен-

ции на экране равно 1 мм, $a=1$ м, $r=10$ см, $\lambda=4861$ Å. Интерферирующие лучи падают на экран приблизительно перпендикулярно.

209. Определить расстояние x между центром картины и пятой светлой полосой в установке с зеркалами Френеля (рис. 22) ($\alpha=20'$, $r=10$ см, $a=1$ м) для $\lambda=5890$ Å. Интерферирующие лучи падают на экран приблизительно перпендикулярно.

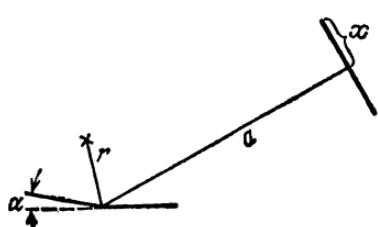


Рис. 22.

Френеля, если источник света: 1) точка; 2) щель, параллельная линии пересечения зеркал.

П р и м е ч а н и е. Предполагается, что отдельные участки щели когерентны между собой и колеблются в одной фазе. Это можно осуществить, например, освещая щель плоской волной.

212. Выразить расстояние x от центра интерференционной картины до m -й светлой полосы в опыте с бипризмой (рис. 23). Показатель преломления призмы n , длина волны

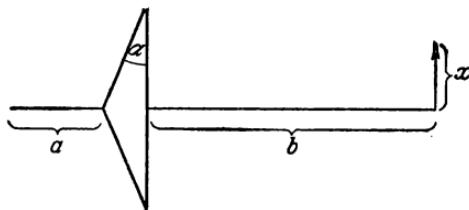


Рис. 23.

λ , преломляющий угол α . Интерферирующие лучи падают на экран приблизительно перпендикулярно.

213. Преломляющий угол бипризмы $\alpha=3'26''$. Между точечным источником монохроматического света ($\lambda=5000$ Å) и бипризмой помещена линза таким образом, что ширина интерференционных полос оказалась не зависящей от расстояния экрана до бипризмы. Найти расстояние между соседними темными полосами, если показатель преломления стекла бипризмы $n=1,5$. Найти максимальное число полос

N , которое может наблюдаться в этой установке, если оно получается при удалении экрана от бипризмы на $L=5$ м.

214. При каком положении экрана в установке, описанной в предыдущей задаче, будет наблюдаться максимальное число интерференционных полос, если расстояние между вершинами преломляющих углов бипризмы составляет $l=4$ см? Чему равно это число полос N ? При каком положении экрана интерференционные полосы исчезнут?

215. Найти число полос интерференции N , получающихся с помощью бипризмы, если показатель преломления ее n , преломляющий угол α , длина волны источника λ . Расстояние источника света от бипризмы равно a , а расстояние бипризмы от экрана равно b .

216. Полосы интерференции получаются с помощью бипризмы Френеля с малым преломляющим углом и щелевого источника света, параллельного ребру бипризмы.

Интерференционные полосы наблюдаются на экране, расположенному перпендикулярно к оси установки. Нулевая полоса получается в центре экрана — на оси (точнее, в плоскости симметрии) установки. Расстояние от источника до бипризмы равно a , от бипризмы до экрана b . В какую сторону и на какую величину x сместится нулевая интерференционная полоса, если щелевой источник света немного сместить в направлении, перпендикулярном к оси оптической системы, на величину h ?

217. От двух когерентных источников света S_1 и S_2 (рис. 24) получена система интерференционных полос на экране AB , удаленном от источников на расстояние $a=2$ м. Во сколько раз изменится ширина интерференционных полос, если между источниками и экраном поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием $f=25$ см. Рассмотреть два случая: 1) расстояние линзы от источников равно $2f=50$ см; 2) источники S_1 и S_2 находятся в фокальной плоскости линзы.

218. Плоская волна проходит через стеклянную пластинку с показателем преломления n , падая на ее поверхность нормально. Толщина пластиинки испытывает скачкообразное изменение на величину d порядка длины световой

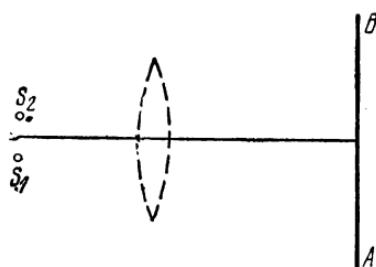


Рис. 24.

волны вдоль некоторой прямой, проходящей через точку C перпендикулярно к плоскости рисунка (рис. 25). Прошедшая волна собирается линзой в ее фокусе. При каких значениях d интенсивность света в фокусе будет вдвое меньше интенсивности света в том же фокусе в случае отсутствия уступа на пластинке?

219. В предыдущей задаче $n=3/2$, $d=2/3 \lambda$. Найти интенсивность света в фокусе линзы, если интенсивность в нем при отсутствии уступа была I_0 .

220. Будут ли наблюдаться интерференционные полосы на экране, если в установке с билинзой поместить источник света между линзой и главным фокусом (билинза получается разрезанием пополам целой линзы, обе половины которой раздвигаются)?

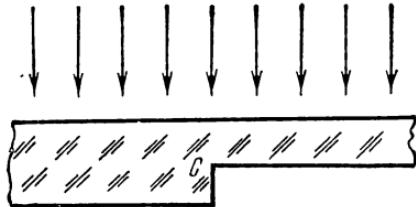


Рис. 25.

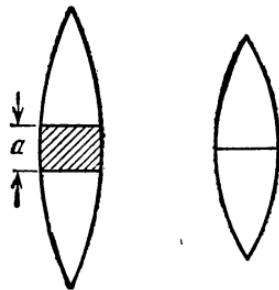


Рис. 26.

221. Из линзы с фокусным расстоянием $f=50$ см вырезана центральная часть ширина a , как показано на рис. 26. Обе половины линзы сдвинуты до соприкосновения. По одну сторону линзы помещен точечный источник монохроматического света ($\lambda=6000 \text{ \AA}$). С противоположной стороны линзы помещен экран, на котором наблюдаются полосы интерференции. Расстояние между соседними светлыми полосами $\Delta x=0,5$ мм и не изменяется при перемещении экрана вдоль оптической оси. Найти a .

222. При каком положении экрана в установке, описанной в предыдущей задаче, интерференционные полосы исчезнут, если диаметр линзы $D=6$ см? При каком положении экрана число интерференционных полос будет максимальным и чему равно это число полос?

223. Наблюдение полос интерференции в белом свете с помощью зеркал Ллойда может быть использовано для

экспериментального доказательства потери полуволны при отражении света от зеркала. С этой целью на пути луча SM (рис. 27) ставят тонкую пластинку P , смещающую полосы интерференции на экране AB вверх. Пусть точка M на экране выбрана так, что оптические длины (SM и SCM) равны. Если бы не было потери полуволны при отражении и изменения фазы волны при входе в пластинку P или при выходе из нее, то волны, приходящие в M по путям SM и SCM , имели бы одинаковые фазы. При использовании белого света в M получилась бы ахроматическая светлая полоса. Опыт же показывает, что ахроматическая полоса темная. Этот факт объясняют потерей полуволны при отражении от зеркала. Как доказать экспериментально, что потеря полуволны происходит именно при отражении от зеркала, а не при входе света в пластинку P или при выходе из нее?

224. Какому условию должны удовлетворять размеры источника света, чтобы могли наблюдаться интерференционные полосы в установке

с 1) зеркалами Френеля, 2) зеркалом Ллойда? Различные светящиеся точки источника излучают некогерентно.

225. Билинза Билле изготовлена из двух половинок тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $f = 10 \text{ см}$. На расстоянии $x = \frac{3}{2} f$ от нее помещен источник света в виде щели, освещаемый широкоугольным пучком света с длиной волны $\lambda = 5790 \text{ \AA}$. Экран для наблюдения интерференционных полос установлен с противоположной стороны билинзы на расстоянии $L = 330 \text{ см}$ от нее. При какой минимальной ширине щели b интерференционные полосы на экране пропадут? Считать, что различные точки щели излучают световые волны некогерентно. Расстояние между половинками билинзы $a = 0,5 \text{ мм}$.

226. На экран с двумя узкими параллельными щелями падают лучи непосредственно от Солнца. При каком расстоянии D между щелями могут наблюдаться интерференционные полосы за экраном? Угловой диаметр Солнца $\alpha \approx 0,01 \text{ рад}$.

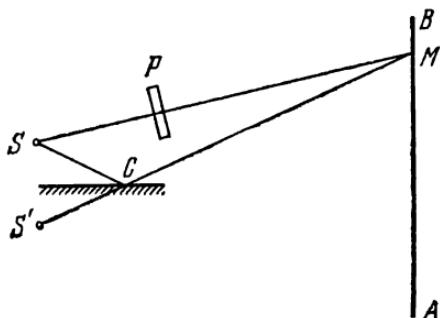


Рис. 27.

П р и м е ч а н и е. Для упрощения расчета диск Солнца заменить квадратом постоянной поверхности яркости.

227. Изображение Солнца получено при помощи линзы с фокусным расстоянием $f=50$ мм на отверстии экрана (размер отверстия равен величине изображения). За экраном помещены две узкие параллельные щели на расстоянии $D=1$ мм друг от друга. При каком расстоянии l между экраном и щелями могут наблюдаться интерференционные полосы?

П р и м е ч а н и е. См. предыдущую задачу.

228. На металлическое зеркало нормально падает пучок света с длиной волны $\lambda=5 \cdot 10^{-5}$ см, причем образуются стоячие волны. На каком расстоянии от зеркала находятся 1-я пучность и 1-й узел электрического вектора светового поля?

229. Линейно-поляризованный свет падает под углом 45° на металлическое зеркало, покрытое очень тонким фотослоем (толщина фотослоя $\ll \lambda$). В одном случае вектор E лежит в плоскости падения, а в другом перпендикулярен к плоскости падения. В каком случае фотослой почернеет?

230. Тонкая пленка освещается источником света. Свет, отраженный от пленки, проектируется линзой на экран. Как надо установить линзу, чтобы на экране наблюдались полосы интерференции?

231. Прозрачная плоскопараллельная стеклянная пластинка освещается параллельным пучком монохроматического света и при этом угол падения, толщина пластиинки, n и λ подобраны так, что отраженный свет вследствие интерференции между лучами, отраженными от двух поверхностей пластиинки, максимально ослаблен. Следовательно, при изменении толщины пластиинки в пределах длины волны ее коэффициент отражения должен был бы изменяться. Однако при увеличении первоначальной толщины в целое число раз он должен остаться неизменным. Поэтому для сколь угодно толстой пластиинки получались бы различные коэффициенты отражения в зависимости от ее толщины. Между тем для бесконечно толстой пластиинки коэффициент отражения не зависит от ее толщины и определяется формулами Френеля. В чем решение этого кажущегося парадокса?

232. Темной или светлой будет в отраженном свете мыльная пленка толщиной $d = 1/10 \lambda$? Пленка находится в воздухе.

233. При каких толщинах d пленки исчезают интерференционные полосы при освещении ее светом с длиной волны $\lambda=6 \cdot 10^{-5}$ см? Показатель преломления пленки $n=1,5$.

234. Зимой на стеклах трамваев и автобусов образуются тонкие пленки наледи, окрашивающие все видимое сквозь них в зеленоватый цвет. Оценить, какова наименьшая толщина этих пленок (показатель преломления наледи принять равным 1,33).

235. Интерференционные полосы равной толщины наблюдаются на воздушном клине между двумя стеклянными пластинками с углом при вершине $\alpha=1'$. Полосы получаются в свете зеленой линии ртути с длиной волны $\lambda=5461 \text{ \AA}$ и шириной $\Delta\lambda=0,1 \text{ \AA}$. Определить: 1) расстояние Δx между двумя соседними полосами; 2) максимальное количество полос N , которые можно было бы видеть на клине, если бы его размеры не были ограничены; 3) расстояние x последней наблюдаемой полосы от вершины клина и толщину последнего h в этом месте; 4) степень параллельности пучка лучей, необходимую для наблюдения всех полос (т. е. максимально допустимое угловое расхождение лучей дф).

236. Свет с длиной волны $\lambda=6000 \text{ \AA}$ падает на тонкую мыльную пленку под углом падения $\varphi=30^\circ$. В отраженном свете на пленке наблюдаются интерференционные полосы. Расстояние между соседними полосами равно $\Delta x=4 \text{ mm}$. Показатель преломления мыльной пленки $n=1,33$. Вычислить угол α между поверхностями пленки.

237. В очень тонкой клиновидной пластинке в отраженном свете при нормальном падении наблюдаются интерференционные полосы. Расстояние между соседними темными полосами $\Delta x=5 \text{ mm}$. Зная, что длина световой волны равна $\lambda=5800 \text{ \AA}$, а показатель преломления пластинки $n=1,5$, найти угол α между гранями пластинки.

238. Наблюдаются полосы равной толщины в воздушном клине между двумя плоскопараллельными стеклянными пластинками, образующими между собой очень малый угол. Клин освещается рассеянным светом. Наблюдение ведется невооруженным глазом с расстояния ясного зрения $L=-25 \text{ cm}$ в направлении, перпендикулярном к поверхности клина, причем глаз может смещаться перпендикулярно к ребру клина. Оценить максимальное число интерференционных полос N , которое может видеть глаз в монохроматическом свете при таком способе наблюдения, если диаметр зрачка глаза $d=5 \text{ mm}$. Оценить степень монохроматичности света, необходимую для того, чтобы такое максимальное число полос могло наблюдаваться.

239. Полосы равной толщины, получающиеся в тонком стеклянном клине с показателем преломления $n=1,5$ при освещении рассеянным монохроматическим светом с длиной волны $\lambda=5000 \text{ \AA}$, проектируются линзой на экран. Перед линзой помещена квадратная диафрагма со стороной $d=1 \text{ см}$ и отстоящая от клина на расстоянии $L=50 \text{ см}$. Какой максимальный порядок интерференции N может при этом наблюдаться на экране? Главная оптическая ось проектирующей системы приблизительно перпендикулярна к поверхности клина.

240. С помощью воздушного клина с углом при вершине α наблюдаются полосы равной толщины в отраженном монохроматическом свете. Свет падает на клин нормально. Найти распределение освещенности E в интерференционной картине на поверхности клина. Считать интенсивности световых пучков, отраженных от обеих поверхностей клина, одинаковыми и равными I_0 .

241. Почему центр колец Ньютона, наблюдавшихся в отраженном свете, обычно темный?

242. Если между линзами из крона и флинта поместить масло, показатель преломления которого имеет промежуточное значение между значениями показателей преломления крона и флинта, то точка соприкосновения линз будет окружена светлым пятном в отраженном свете и темным — в проходящем. Объяснить это явление.

243. Линза из крона ($n_k=1,50$) лежит на пластинке, одна половина которой сделана из того же крона, а другая из флинта ($n_{\text{фл}}=1,70$). Прослойка между линзой и пластинкой заполнена сероуглеродом ($n=1,63$). Описать характер ньютоновых колец в отраженном и проходящем свете.

244. Найти расстояние Δl между двадцатым и двадцать первым светлыми кольцами Ньютона, если расстояние между вторым и третьим равно 1 мм, а кольца наблюдаются в отраженном свете.

245. Найти фокусное расстояние f плоско-выпуклой линзы, примененной для получения колец Ньютона, если радиус третьего светлого кольца равен 1,1 мм, $n_{\text{ст}}=1,6$, $\lambda=5890 \text{ \AA}$. Кольца наблюдаются в отраженном свете.

246. При наблюдении колец Ньютона в отраженном синем свете ($\lambda_c=4500 \text{ \AA}$) с помощью плоско-выпуклой линзы, положенной на плоскую пластинку, радиус третьего светлого кольца оказался равным 1,06 мм. После замены синего светофильтра на красный был измерен радиус пятого светлого кольца, оказавшийся равным 1,77 мм. Найти

радиус кривизны R линзы и длину волны $\lambda_{\text{кр}}$ красного света.

247. Плоскопараллельная стеклянная пластинка лежит на одной из поверхностей двояковыпуклой линзы. При наблюдении колец Ньютона в отраженном свете натриевой горелки ($\lambda=5890 \text{ \AA}$) найдено, что радиус темного кольца порядка $m=20$ (центральному темному кольцу соответствует $m=0$) равен $r_1=2 \text{ мм}$. Когда пластинка была положена на другую поверхность линзы, радиус темного кольца того же порядка сделался равным $r_2=4 \text{ мм}$. Определить фокусное расстояние линзы, если показатель преломления стекла, из которого она изготовлена, $n=1,5$.

248. Найти радиус r центрального темного пятна колец Ньютона, если между линзой и пластинкой налит бензол ($n=1,5$). Радиус кривизны линзы $R=1 \text{ м}$. Показатели преломления линзы и пластинки одинаковы. Наблюдение ведется в отраженном натриевом свете ($\lambda=5890 \text{ \AA}$).

249. Кольца Ньютона получаются между двумя плоско-выпуклыми линзами, прижатыми друг к другу своими выпуклыми поверхностями. Найти радиус r_m m -го темного кольца, если длина световой волны равна λ , а радиусы кривизны выпуклых поверхностей линз равны R_1 и R_2 . Наблюдение ведется в отраженном свете.

250. Кольца Ньютона получаются с помощью плоско-выпуклой линзы с радиусом кривизны R_1 , положенной на вогнутую сферическую поверхность с радиусом кривизны $R_2 > R_1$. Кольца наблюдаются в отраженном свете. Определить радиус r_m m -го темного кольца, если длина световой волны равна λ .

251. В установке для наблюдения колец Ньютона плоско-выпуклая линза сделана подвижной и может перемещаться в направлении, перпендикулярном к пластинке. Описать, что будет происходить с кольцами Ньютона при удалении и приближении линзы к пластинке. Кольца получаются с помощью монохроматического света.

252. Описать, как будет меняться резкость колец Ньютона при перемещении линзы в установке, описанной в предыдущей задаче, если они наблюдаются в отраженном свете D -линий Na , учитывая, что D -линия Na не монохроматична, а представляет собой две близкие спектральные линии с $\lambda_1=5890 \text{ \AA}$ и $\lambda_2=5896 \text{ \AA}$.

253. Найти разность длин волн D -линий Na , если известно, что резкость интерференционной картины, наблюдавшейся в интерферометре с двумя лучами, минимальна у

тыреста девяностой, тысяча четыреста семидесятой и т. д., а максимальна у первой, девятьсот восьмидесятой и т. д. полос. Средняя длина волны D -линий $\lambda=5893 \text{ \AA}$.

254. Перед линзой L (рис. 28) установлена плоскопараллельная стеклянная пластинка P , перпендикулярная к главной оптической оси и освещаемая монохроматическим светом от протяженного источника. Описать интерференционную картину в фокальной плоскости линзы. Как изменится эта картина при наклоне пластинки на угол $\alpha=10^\circ$ (по отношению к исходному положению)? Фокусное расстояние линзы $f=30 \text{ см}$.

255. Интерференционные полосы равного наклона в фокальной плоскости линзы L (рис. 29) получаются при

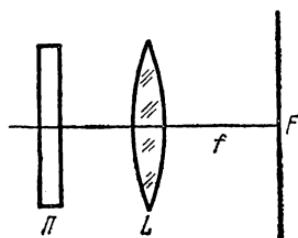


Рис. 28.

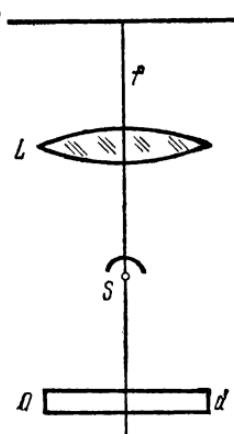


Рис. 29.

отражении от плоскопараллельной пластинки P , освещаемой монохроматическим источником света S . Прямой свет источника на линзу не попадает. Длина световой волны $\lambda=6000 \text{ \AA}$, толщина пластиинки $d=1,6 \text{ мм}$; показатель преломления $n=1,5$; фокусное расстояние линзы $f=40 \text{ см}$. Найти радиус r первого видимого на экране \mathcal{E} темного интерференционного кольца, если центр колец — темный. Какова максимально допустимая ширина линии $\Delta\lambda$, освещющей пластинку, чтобы при указанных параметрах схемы можно было наблюдать интерференционные кольца?

256. Сколько темных колец N можно наблюдать в условиях предыдущей задачи, если диаметр линзы $D=8 \text{ см}$, а источник S помещен посередине между линзой и пластинкой на расстоянии f от линзы?

257. Какова должна быть минимальная толщина пластиинки, чтобы в условиях предыдущей задачи можно было получить по крайней мере одно темное кольцо?

258. Три синфазных излучателя 1, 2, 3 расположены вдоль прямой (рис. 30). Расстояние между излучателями 1 и 2 равно $\lambda/2$, а между излучателями 2 и 3 в полтора раза больше. Амплитуды излучателей 1 и 2 одинаковы. Какова должна быть амплитуда излучателя 3, чтобы в диаграмме направленности системы существовали минимумы нулевой интенсивности? Найти направления на эти минимумы. Решение дать аналитически и с помощью векторной диаграммы.

259. Тот же вопрос для случая, когда расстояние между излучателями 1 и 2 равно $\frac{2}{5}\lambda$, а между излучателями 2 и 3 вдвое больше.

260. Горизонтальный электрический вибратор помещен над идеально проводящей горизонтальной плоскостью на высоте h . Начертить диаграммы направленности вибратора в вертикальной плоскости, перпендикулярной к его оси, для $h=\frac{1}{4}\lambda$, $h=\frac{1}{2}\lambda$, $h=\frac{3}{4}\lambda$, $h=\lambda$. Найти направления на максимумы и минимумы излучения для этих случаев.

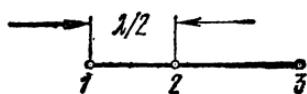


Рис. 30.

261. Эффект Вавилова — Черенкова состоит в том, что электрон, равномерно движущийся в среде с показателем преломления n , может при известных условиях излучать свет. Найти условия, при которых такое излучение возникает, а также направление излучения, рассматривая интерференцию волн, возбуждаемых электроном в разные моменты времени.

262. Существуют различные конструкции черенковских счетчиков, в которых излучение Вавилова — Черенкова используется для регистрации заряженных частиц. Частицы попадают в блок прозрачного вещества $ABCD$ (рис. 31) и возбуждают в нем черенковское излучение. Излучение выходит через грань AB и попадает в фотоумножитель, где вызывает импульс тока. Считая, что частицы летят нормально к грани CD , определить, при каких скоростях они могут регистрироваться счетчиком, если показатель преломления вещества блока равен n . При каком показателе преломления n релятивистские частицы ($\beta \equiv V/c \approx 1$) не могут регистрироваться счетчиком?

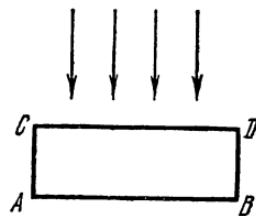


Рис. 31.

§ 4. Дифракция света

263. 1) Вычислить радиус m -й зоны Френеля, если расстояние от источника до зонной пластинки равно a , а расстояние от пластинки до места наблюдения равно b . Длина волны λ . 2) Найти радиус первой зоны, если $a=b=10$ м, $\lambda=4500$ Å.

264. 1) Вычислить радиус m -й зоны Френеля при условии, что на зонную пластинку падает плоская волна. 2) Найти r_1 для этого случая, полагая, как и в предыдущей задаче, $b=10$ м, $\lambda=4500$ Å.

265. Зоны Френеля строятся со стороны вогнутой поверхности сходящейся сферической волны радиуса a . Расстояние от поверхности волны до точки наблюдения равно b . Найти выражение для радиуса r_m m -й зоны Френеля.

266. Зонная пластинка дает изображение источника, удаленного от нее на 3 м, на расстоянии 2 м от своей поверхности. Где получится изображение источника, если его отодвинуть в бесконечность?

267. Определить фокусное расстояние f зонной пластинки для света с длиной волны 5000 Å, если радиус пятого кольца этой пластинки равен 1,5 мм; определить радиус r_1 первого кольца этой пластинки. Что произойдет, если пространство между зонной пластинкой и экраном заполнено средой с показателем преломления n ($n>1$)?

268. Какова интенсивность света I в фокусе зонной пластинки, если закрыты все зоны, кроме первой? Интенсивность света без пластинки равна I_0 .

269. Какова будет интенсивность света I в фокусе зонной пластинки, если закрыть всю пластинку, за исключением верхней половины первой зоны? Интенсивность света без пластинки равна I_0 .

270. Какова интенсивность света I в центре дифракционной картины от круглого экрана, если он закрывает всю первую зону? Интенсивность света в отсутствие экрана равна I_0 .

271. Яркий источник можно сфотографировать, поместив между ним и фотопластинкой гладкий непрозрачный шар. Объяснить явление. Диаметр шара $D=40$ мм, расстояние от источника до шара $a=12$ м, расстояние от шара до изображения $b=18$ м, размер источника $y=7$ мм. Определить размер изображения y' . Будет ли изображение испорчено, если поверхность шара испещрена множеством

неправильных царапин, глубина которых h порядка 0,1 мм? Можно ли шар заменить диском?

272. Диск из стекла с показателем преломления n (для длины волны λ) закрывает полторы зоны Френеля для точки наблюдения P . При какой толщине h диска освещенность в P будет наибольшая?

273. Непрозрачный экран, имеющий форму полудиска, помещен между точечным источником S и точкой наблюдения A таким образом, что точка O располагается на одной прямой с точками S и A (рис. 32). Экран закрывает небольшое нечетное число полузон Френеля. Какая будет освещенность в точке A ?

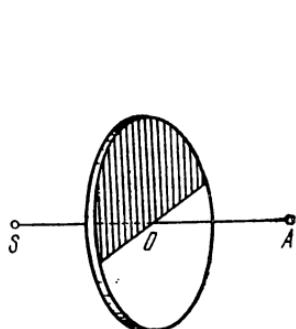


Рис. 32.

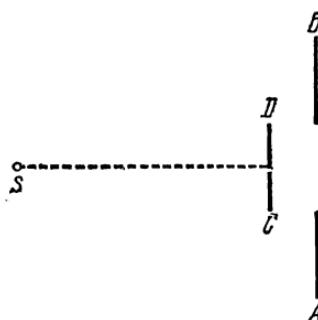


Рис. 33.

274. Между точечным источником S и точкой наблюдения A помещен диск, центр которого расположен на одной прямой с точками S и A (рис. 32). Одна половина диска прозрачна, другая непрозрачна. Диск закрывает первые три зоны Френеля. Толщина прозрачной части диска $l = N \frac{\lambda}{2(n-1)}$, где n — показатель преломления прозрачной части диска, N — целое число. Какая будет освещенность в точке A при четном и нечетном N ?

275. Вдали от точечного источника S электромагнитной волны поставлен бесконечный идеально отражающий плоский экран AB (рис. 33). Пользуясь векторной диаграммой, найти, как изменится интенсивность отраженной волны в точке S , если из экрана вырезать диск CD с центром в основании перпендикуляра, опущенного из S на плоскость экрана, и сместить этот диск по направлению к источнику на одну двенадцатую длины волны? Площадь диска составляет одну треть от площади первой зоны Френеля. Как

изменится результат, если смещение произвести в противоположную сторону на ту же величину?

276. В установке предыдущей задачи площадь диска составляет половину площади центральной зоны Френеля. На какое минимальное расстояние h следует сместить диск в направлении от источника, чтобы интенсивность отраженной волны в точке S осталась неизменной?

277. Если круглое отверстие (например, ирисовая диафрагма) увеличивается таким образом, что его радиус от радиуса одной зоны возрастает до радиуса двух зон, то освещенность в точке P (точка P — изображение источника света, даваемое диафрагмой) падает почти до нуля. Как согласовать этот факт с увеличением всего светового потока через диафрагму в два раза?

278. Точечный источник монохроматического света помещен на расстоянии a от круглой диафрагмы, а экран с противоположной стороны — на расстоянии b от нее. При каких радиусах диафрагмы r центр дифракционных колец, наблюдавшихся на экране, будет темным и при каких — светлым, если перпендикуляр, опущенный из источника на плоскость диафрагмы, проходит через ее центр?

279. На длиннофокусную собирающую линзу с ирисовой диафрагмой падает параллельный пучок монохроматического света. На расстоянии a от линзы помещен экран, на котором наблюдаются дифракционные кольца. При каких радиусах диафрагмы центр колец будет темным и при каких — светлым, если фокусное расстояние линзы равно f ?

280. Для получения фотографий дифракционных картин в тех случаях, когда источник света и экран расположены очень далеко, В. К. Аркадьевым был применен метод подобия, в котором вместо действительных препятствий, стоящих на пути лучей, используются их уменьшенные и подобные модели. Требуется получить фотографию дифракционной картины от диска диаметром $D=50$ см, когда на его оси расположен точечный источник света на расстоянии $A=25$ км, а экран удален от него на $B=50$ км (плоскость экрана перпендикулярна к оси диска). С этой целью диск заменили уменьшенной моделью с диаметром $d=1$ см. Определить, на каких расстояниях a и b следует поместить источник света и экран, чтобы получилась подобная и уменьшенная в $n=50$ раз дифракционная картина.

281. На рис. 34 изображена схема одной из установок для наблюдения интерференционных полос. Линза разрезается на две одинаковые половинки L_1 и L_2 , которые отодвигают-

ся друг от друга на значительное расстояние вдоль оптической оси. Источник света S помещен на оптической оси. Световой пучок, проходящий через половинку линзы L_1 , перекрывается с пучком, проходящим через половинку линзы L_2 , на участке $S''S'$, на котором и происходит интерференция этих

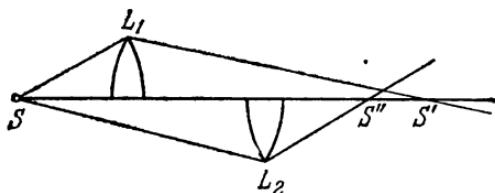


Рис. 34.

двух пучков света. Если там поместить экран или (что лучше) производить наблюдение в микроскоп, то будут видны интерференционные кольца. Какой центр будут иметь эти кольца: светлый или темный?

282. Интенсивность света в некоторой точке на оси за отверстием в непрозрачном экране, на который нормально падает параллельный пучок монохроматического света, равна I_0 , если в отверстии укладывается одна зона Френеля. С помощью векторной диафрагмы найти интенсивность света в той же точке, если радиус отверстия уменьшить на $\alpha = 1/3$ первоначальной величины.

283. Требуется изготовить отражательную зонную пластинку на вогнутом сферическом зеркале путем снятия отражающего покрытия зеркала кольцевыми зонами Френеля. Найти радиус m -й зоны r_m , если источник света и точка наблюдения расположены на оси зеркала на расстояниях a и b соответственно от его вершины, причем $a \leq R \leq b$, $r_m \ll a$, где R — радиус кривизны поверхности зеркала.

284. В предыдущей задаче $R=100$ см, $a=80$ см, $\lambda=5000$ Å, радиус четвертой зоны Френеля $r_4=0,2$ см. Где будут расположены изображения S' источника нулевого и ± 1 -го порядков?

285. Зонная пластинка имеет такие же параметры, как и в предыдущей задаче. Источник монохроматического света ($\lambda=5000$ Å) помещен в центре кривизны вогнутого зеркала, на котором она изготовлена ($a=R$). Пластинка дает два изображения ± 1 -го порядков в точках, отстоящих от зеркала на расстояниях b_1 и b_2 , причем $b_1 - b_2 = R/10$. Найти радиус m -й зоны пластинки.

286. Параллельный пучок монохроматического света ($\lambda=5000 \text{ \AA}$) интенсивности I_0 падает на непрозрачный экран с круглым отверстием диаметра 2 мм. 1) Найти расстояния b_1, b_2, \dots, b_m до экрана точек P_1, P_2, \dots, P_m на оси отверстия, для которых в пределах отверстия укладывается 1, 2, ..., m зон Френеля. 2) Построить приближенно график зависимости интенсивности света на оси отверстия от расстояния точки наблюдения до экрана. 3) На сколько надо сместиться из точки P_1 , удаляясь от экрана, чтобы интенсивность света в новой точке наблюдения стала в два раза меньше, чем в точке P_1 ?

287. Параллельный пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda=6000 \text{ \AA}$ нормально падает на непрозрачный экран с круглым отверстием диаметром $D=1,2 \text{ mm}$. На расстоянии $b_1=18 \text{ cm}$ за экраном на оси отверстия наблюдается темное пятно. На какое минимальное расстояние Δb нужно сместиться от этой точки вдоль оси отверстия, удаляясь от него, чтобы в центре дифракционной картины вновь наблюдалось темное пятно?

288. Дифракция Френеля от точечного монохроматического источника света, расположенного на оси круглого отверстия, наблюдается на экране, установленном перпендикулярно к оси отверстия. При перемещении экрана вдоль оси интенсивность в центре дифракционной картины проходит через максимумы и минимумы. Сколько зон Френеля m вписывается в отверстие диафрагмы при наблюдении наиболее удаленного максимума, если экран при этом оказался на таком же расстоянии от диафрагмы, что и источник света, находящийся по другую сторону диафрагмы?

289. Основное фокусное расстояние амплитудной плоской зонной пластинки равно f_0 . Найти ее остальные фокусные расстояния.

290. Освещенный предмет расположен на оси зонной пластинки на расстоянии a от нее. Самое дальнее от зонной пластинки изображение предмета получается на расстоянии b от нее. На каких расстояниях b_k от пластинки получаются остальные изображения предмета?

291. С помощью зонной пластинки надо сфотографировать освещенный предмет с угловым размером $2\alpha=0,1 \text{ rad}$. Оценить число зон пластинки, при котором будет достигнута наибольшая четкость в изображении всех частей предмета.

292. На белой стене наблюдается тень от прямолинейного края AB непрозрачного экрана, освещаемого параллельными монохроматическими лучами, падающими на экран

перпендикулярно ($\lambda=5000$ Å). Плоскости стены и экрана параллельны, расстояние между ними $b=4$ м. На краю экрана выточено углубление, имеющее форму полукруга радиуса $r=1$ мм (рис. 35). Как изменится интенсивность света в точке стены, являющейся геометрической тенью центра O соответствующего круга по сравнению с интенсивностью в той же точке, когда углубления не было?

293. Условие того, чтобы френелева дифракционная картина на отверстии переходила в фраунгоферову, заключается, очевидно, в том, чтобы максимальная разность фаз двух лучей, идущих от разных точек отверстия к экрану, на котором наблюдается дифракционная картина, была мала по сравнению с π . Выразить это условие через размеры отверстия d , длину волны λ и расстояние от экрана до места наблюдения r .

294. Один из методов измерения угловых диаметров звезд заключается в следующем.

Свет от звезды во время новолуния проходит мимо края Луны и на нем претерпевает дифракцию. На поверхности Земли получаются дифракционные полосы, перемещающиеся со скоростью около 500 м/с. Для их наблюдения в фокусе телескопа помещают фотоэлемент. Возбуждаемый фотоэлектрический ток усиливается и с помощью осциллографа записывается на движущейся ленте. Резкость максимумов и минимумов на осциллограмме зависит от углового размера звезды. Сравнивая осциллограмму с теоретической, вычисленной в предположении, что звезда излучает как равномерно светящийся диск, можно вычислить ее угловой диаметр ϕ . Считая сначала край Луны абсолютно гладким, оценить, какие угловые диаметры звезд доступны измерению указанным методом. Оценить высоту неровностей лунной поверхности h для возможности получения дифракционных полос. Расстояние до Луны $b=380\ 000$ км.

295. Найти угловое положение минимумов при дифракции Фраунгофера на щели, пользуясь принципом Гюйгенса — Френеля и разбивая плоскость щели на зоны. Угол скольжения падающего луча относительно плоскости щели равен α_0 . Плоскость падения перпендикулярна к длине щели.

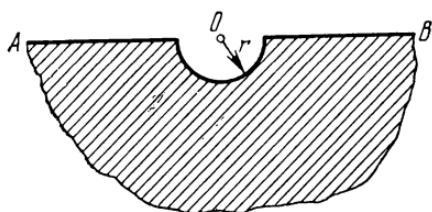


Рис. 35.

296. Квадратное отверстие со стороной $L_0=0,2$ см освещается параллельным пучком солнечных лучей, падающими нормально к плоскости отверстия. Найти форму и размер $L \times L$ изображения отверстия на экране, удаленном на 50 м от него, если плоскость экрана параллельна плоскости отверстия. Границей освещенности на экране считать положение первого дифракционного минимума наиболее сильно отклоняемых лучей (видимый спектр 7000—4000 Å).

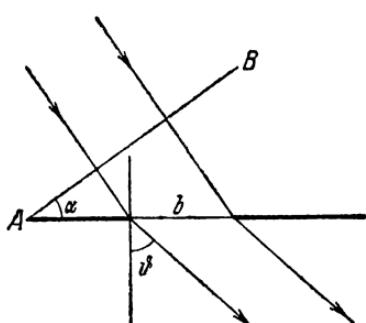


Рис. 36.

297. Доказать, что при дифракции Фраунгофера интенсивности дифрагированного света от дополнительных экранов совпадают во всех направлениях, за исключением направления падающей волны (принцип Бабине). Дополнительными называются два экрана, когда непрозрачные места одного экрана по форме и расположению совпадают с отверстиями другого.

298. Плоская световая волна падает нормально на абсолютно черный экран, размеры которого велики по сравнению с длиной волны. Часть энергии поглощается черным экраном, а часть рассеивается из-за дифракции. Показать, что количество поглощенной энергии равно количеству рассеянной.

299. Щель постоянной ширины прикрыта двумя плоско-параллельными стеклянными пластинками толщины d с показателями преломления n_1 и n_2 , примыкающими друг к другу. Одна пластина закрывает первую половину щели, другая — вторую половину щели. На щель нормально падает плоская монохроматическая волна. При каком условии центр дифракционной картины Фраунгофера будет темным?

300. На щель ширины b положена стеклянная призма с показателем преломления n и преломляющим углом α (рис. 36). На грань AB призмы нормально падает плоская монохроматическая волна. Найти направления на нулевой максимум и минимумы в дифракционной картине Фраунгофера.

301. Найти угловое распределение интенсивности света при фраунгоферовой дифракции на решетке из N щелей и с

периодом d при условии, что световые лучи падают на решетку нормально, а ширина щели равна b .

302. Дополнительными, или взаимно дополнительными, дифракционными решетками называются такие щелевые решетки, у которых непрозрачные места одной решетки заменены прозрачными в другой (ср. задачу 297). Убедиться непосредственным расчетом, что при освещении таких решеток одним и тем же световым пучком положения и интенсивности главных дифракционных максимумов одного и того же порядка совпадают, за исключением главных максимумов нулевых порядков. Если же число штрихов решетки очень велико, то совпадают также интенсивности дифрагированного света для всех направлений, за исключением направления падающего света.

303. Параллельный пучок монохроматического света падает нормально на дифракционную решетку с заданной полной шириной ее штрихованной поверхности. При каком значении отношения b/d ширины щели b к периоду решетки d интенсивность главных дифракционных максимумов второго порядка будет максимальна?

304. Показать, что для обычной амплитудной щелевой дифракционной решетки справедливо неравенство $I_{\text{диф}} \leqslant \frac{1}{4} I_{\text{пад}}$, где $I_{\text{пад}}$ — полный поток энергии, падающий на решетку, а $I_{\text{диф}}$ — поток энергии дифрагированного света, приходящийся на все дифракционные максимумы, кроме максимума нулевого порядка. Максимальное значение дифрагированного потока энергии достигается в случае, когда ширина щелей решетки равна половине ее периода.

305. Найти угловое распределение дифракционных минимумов при дифракции на решетке, период которой равен d , а ширина щели равна b .

306. Найти условие появления главного дифракционного максимума при наклонном падении лучей на решетку (угол падения ϑ_0). Какой вид принимает это условие, если $d \gg \lambda$, а порядок спектра $n \ll d/\lambda$?

307. Пучок рентгеновских лучей падает на решетку с периодом 1 мкм под углом $89^\circ 30'$. Угол дифракции для спектра второго порядка равен 89° . Найти λ .

308. При каком условии можно наблюдать зеркальное отражение от шероховатой поверхности при малых и больших углах падения?

309. Могут ли перекрываться спектры первого и второго порядков дифракционной решетки при освещении ее видимым светом (7000—4000 Å)?

310. Найти условие равенства нулю интенсивности m -го максимума для дифракционной решетки с периодом d и шириной щели b .

311. Описать характер спектров дифракционной решетки, если ее постоянная равна: 1) удвоенной; 2) утроенной; 3) четырехкратной ширине щели.

312. Какой максимальный порядок спектра может наблюдаться при дифракции света длины волны λ на решетке с периодом d ?

313. Определить длину волны спектральной линии, изображение которой, даваемое дифракционной решеткой в спектре третьего порядка, совпадает с изображением линии $\lambda=4861 \text{ \AA}$ в спектре четвертого порядка.

314. Чем определяется максимальная длина волны, которая может получиться в спектре дифракционной решетки? Определить постоянную, которую должна иметь решетка, способная давать инфракрасный спектр с длинами волн до 100 мкм.

315. На одномерную фазовую дифракционную решетку (рис. 37) нормально падает плоская монохроматическая

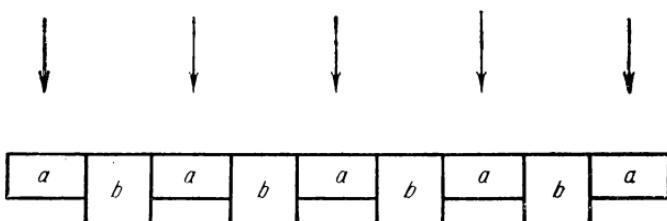


Рис. 37.

волна. На участках a и b оптические пути равны соответственно $l_1=n_1z_1$ и $l_2=n_2z_2$ (n_1 и n_2 — показатели преломления, z_1 и z_2 — соответствующие толщины). Как меняются интенсивности дифракционных максимумов и соответствующие им углы дифракции при $n_1 \rightarrow n_2$ и $z_1 \rightarrow z_2$?

316. На одномерную дифракционную решетку со щелями (рис. 38) падает плоская монохроматическая волна. Щели b решетки совсем прозрачные, а участки a имеют коэффициент пропускания α . Толщина решетки бесконечно мала по сравнению с длиной волны. Как меняются интенсивности дифракционных максимумов и соответствующие им углы дифракции, когда $\alpha \rightarrow 1$?

317. Прозрачная периодическая структура, профиль которой изображен на рис. 39, освещается сверху плоской монохроматической волной, падающей нормально на верхнюю границу. Ширины уступов и впадин структуры одинаковы. При заданном показателе преломления n

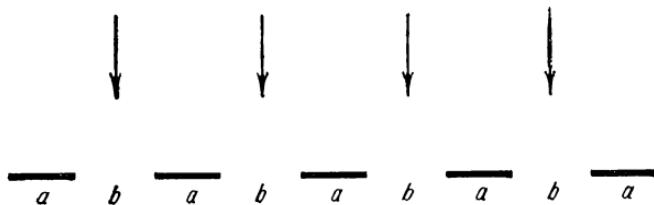


Рис. 38.

подобрать глубину h таким образом, чтобы главные франгоферовы дифракционные максимумы первого порядка имели наибольшую интенсивность. Какова при этом интенсивность нулевого главного максимума?

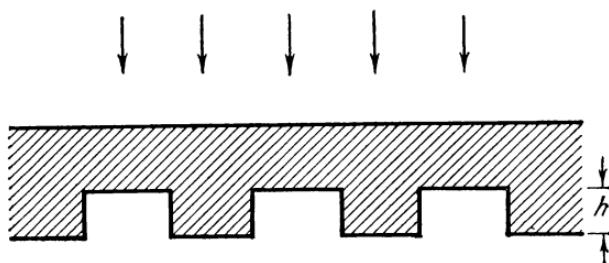


Рис. 39.

318. Две решетки из N синфазных вибраторов каждая сдвинуты друг относительно друга на расстояние a (рис. 40). Как будет меняться диаграмма направленности системы из

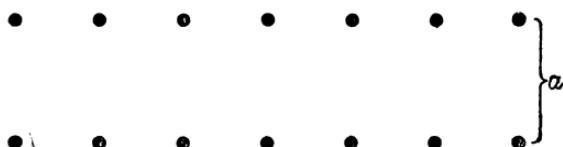


Рис. 40.

таких решеток в зависимости от изменения расстояния a между ними? Рассмотреть случаи: $a=1/2 \lambda$, $a=\lambda$, $a=3/2 \lambda$, $a=2\lambda$.

319. Как изменится диаграмма направленности решетки из $3N$ равноотстоящих синфазных вибраторов, если убрать каждый третий из них?

320. Сложная излучающая система состоит из конечного ряда густо расставленных параллельных вибраторов с равномерным распределением фаз колебаний вдоль ряда. Как должен изменяться со временем сдвиг фаз $\Delta\varphi$ между двумя соседними вибраторами, чтобы главный лепесток диаграммы направленности всей системы совершил круговой обзор местности с постоянной угловой скоростью Ω (при отсутствии вращения самой системы)?

321. Над центром граммофонной пластинки O_1 помещен точечный источник монохроматического света на высоте $h_1=1$ см. Глаз наблюдателя расположен на высоте $h_2=10$ см на расстоянии $a=110$ см от оси пластиинки. Помимо геометрического изображения источника глаз видит систему дифракционных полос на поверхности пластиинки. Определить расстояние Δx между ними, если расстояние между бороздками $d=0,5$ мм. Длина световой волны $\lambda=5500$ Å.

322. Дифракционную решетку можно характеризовать ее пропускаемостью. Пропускаемостью D называется функция, определяемая соотношением $E_{\text{вых}}(x)=D(x) E_{\text{вх}}(x)$, где $E_{\text{вх}}$ — поле падающей волны на передней поверхности решетки, а $E_{\text{вых}}$ — поле выходящей волны на задней поверхности решетки. (Ось X выбрана на поверхности решетки перпендикулярно к ее штрихам.) Если пропускаемость синусоидальна, т. е. представляется выражением $D=\alpha(1+q \cos px)$ с постоянными α , q , p , то решетка называется решеткой Рэлея. Показать, что дифракционный спектр такой решетки состоит только из трех максимумов: нулевого и двух максимумов первого порядка.

323. 1) Подсчитать угловую дисперсию в угл.с/Å в спектре первого порядка для решетки, имеющей 3937 штрихов на 1 см. 2) Подсчитать линейную дисперсию спектрографа с такой решеткой при объективе с фокусным расстоянием 50 см. 3) Подсчитать величину, обратную линейной дисперсии (число Å на 1 мм). При расчете считать, что углы дифракции малы ($\cos \theta \approx 1$).

324. Какое расстояние между компонентами желтой линии дублета натрия ($\lambda_1=5890$ Å, $\lambda_2=5896$ Å) получится на фотографическом негативе в спектрографе, описанном в предыдущей задаче?

325. Найти угловую дисперсию решетки с постоянной $d=5$ мкм, если $\lambda=5000$ Å, порядок спектра $n=3$.

326. На плоскую отражательную решетку нормально падает свет D -линии натрия ($\lambda=5890 \text{ \AA}$). Определить число штрихов решетки на 1 мм, если спектр второго порядка наблюдается под углом 45° к нормали.

327. Найти угловое расстояние между главным максимумом и ближайшим к нему минимумом дифракционной решетки.

328. Какая получится ширина спектральной линии водорода ($\lambda=6563 \text{ \AA}$) на негативе спектрографа, если в нем использована решетка шириной $l=3 \text{ см}$ и объектив с фокусным расстоянием $f=15 \text{ см}$?

329. Подсчитать минимальное число штрихов решетки, которая может разрешить натриевый дублет в спектре первого порядка.

330. Подсчитать разрешающую силу решетки с периодом $2,5 \cdot 10^{-4} \text{ см}$ и шириной 3 см в спектрах первого и четвертого порядков.

331. Изменяется ли разрешающая сила решетки при изменении наклона первичного пучка, падающего на нее?

332. Изменяется ли разрешающая способность и дисперсионная область дифракционной решетки, если, закрепив неподвижно трубу, в которую наблюдаются дифракционные спектры, закрыть через одну щели решетки?

333. На плоскую отражательную решетку, содержащую $N=50\,000$ штрихов, нормально падает свет от двойной линии натрия ($\lambda_1=5890 \text{ \AA}$, $\lambda_2=5896 \text{ \AA}$). Число штрихов, приходящееся на 1 см длины решетки, равно $n=5000$. Какой максимальный порядок спектра m можно получить от такой решетки и каково минимальное расстояние $\delta\lambda$ между спектральными линиями, которое способна разрешить решетка в указанной области спектра? Спектр максимального порядка фотографируется на фотопластинке с помощью объектива с фокусным расстоянием $f=50 \text{ см}$. Какое расстояние Δx между спектральными линиями λ_1 и λ_2 получится на фотопластинке?

334. Коллиматорная щель S , освещаемая источником света, помещается в главном фокусе линзы L с фокусным расстоянием $f=20 \text{ см}$. Пройдя через линзу, свет падает на дифракционную решетку, плоскость которой перпендикулярна к главной оптической оси линзы L . Число штрихов решетки $N=1000$, ее период $d=0,001 \text{ см}$. Какова должна быть ширина коллиматорной щели x , чтобы была полностью использована разрешающая способность решетки в окрестности длины волны $\lambda=5000 \text{ \AA}$?

335. Найти связь между углом выхода луча (соответствующего максимуму) из пластинки Луммера — Герке с толщиной h и показателем преломления n .

336. Определить угловую дисперсию и дисперсионную область пластинки Луммера — Герке с учетом дисперсии показателя преломления. Считать ϵ малым (см. ответ к предыдущей задаче).

337. Каково число z интерферирующих лучей в пластинке Луммера — Герке длиной $L=30$ см, толщиной $h=1$ см и с показателем преломления $n=1,52$?

338. Найти минимальный и максимальный порядки спектров, которые могут наблюдаться с пластинкой, описанной в предыдущей задаче, для водородной линии H_β ($\lambda=4861$ Å).

339. Найти дисперсионную область и разрешающую силу R пластинки Луммера — Герке, описанной в задаче 337; $dn/d\lambda$ для водородной линии H_β равно $9,6 \cdot 10^{-6}$ Å⁻¹.

340. Определить угловое расстояние между соседними максимумами в пластинке, описанной в задаче 337, для H_β -линии при условии, что $\epsilon=1^\circ$.

341. Как изменяется разрешающая способность и дисперсионная область пластинки Луммера — Герке, если ее толщину увеличить вдвое, а длину оставить без изменения?

342. Как изменяется разрешающая способность и дисперсионная область пластинки Луммера — Герке, если ее длину увеличить вдвое, а толщину оставить без изменения?

343. Две пластинки Луммера — Герке имеют одинаковые геометрические размеры, но сделаны из различных сортов стекла. Какая пластинка имеет большую разрешающую способность и какая большую дисперсионную область?

344. Какую минимальную длину должна иметь пластинка Луммера — Герке ($n=1,5$), чтобы разрешить дублетную структуру линии H_α ($\lambda=6563$ Å)? Разность длин волн линий дублета равна 0,14 Å. Пренебречь величиной $dn/d\lambda$.

345. Какая интерференционная картина будет наблюдаться при освещении монохроматическим светом двух скрещенных пластинок Луммера — Герке, т. е. двух пластинок, расположенных одна за другой вдоль прямой линии, но повернутых друг относительно друга на 90° ?

346. Определить условие максимума, угловое расстояние между максимумами, угловую дисперсию и дисперсионную область эталона Фабри — Перо (ввести угол падения ϕ и расстояние между пластинками h).

347. Определить дисперсионную область эталона Фабри — Перо при $h=1$ см, $\lambda=5000$ Å. Угол падения φ считать малым.

348. Чему равен порядок спектра при работе с эталоном Фабри — Перо в зеленой части спектра ($\lambda=5500$ Å), если расстояние между пластинками равно 1 см? Угол падения очень мал.

349. Разрешающую способность интерферометра Фабри — Перо можно определить, пользуясь следующим критерием. Для разрешения двух спектральных линий λ и λ' необходимо, чтобы в интерференционной картине, даваемой интерферометром, эти линии были разведены на расстояние, не меньшее полуширины линии. Пользуясь этим критерием, найти выражение для разрешающей способности интерферометра Фабри — Перо.

350. 1) Каков порядок m спектра при работе в области $\lambda=5000$ Å с эшелоном Майкельсона, высота ступенек которого $b=1$ см, а показатель преломления стекла $n=1,5$? 2) Найти угловое расстояние ϑ между главными максимумами для той же области спектра при ширине ступеньки $a=0,2$ см.

351. Какую разрешающую силу должен иметь спектральный аппарат для разрешения дублета D -линии натрия ($\lambda_1=5890$ Å, $\lambda_2=5896$ Å)?

352. Найти величину наименьшего основания призмы, изготовленной из стекла, дисперсия которого вблизи D -линии натрия равна $dn/d\lambda=956$ см $^{-1}$ и которая сможет разрешить желтый дублет натрия ($\lambda_1=5890$ Å, $\lambda_2=5896$ Å).

353. Спектрограф имеет стеклянную призму с основанием $a=10$ см и преломляющим углом $A=60^\circ$, устанавливаемую при работе на угол наименьшего отклонения вблизи длины волны $\lambda=5000$ Å. Показатель преломления стекла призмы $n=1,73$; фокусное расстояние объектива коллиматора $f=25$ см. Какова должна быть ширина коллиматорной щели b , чтобы можно было практически полностью использовать теоретическую разрешающую способность призмы?

354. Какой должна быть длина b основания стеклянной призмы, чтобы она имела такую же разрешающую способность, как и пластинка Луммера — Герке длиной $L=20$ см? Показатель преломления пластинки $n=1,5$; дисперсия показателя преломления призмы $dn_{np}/d\lambda=956$ см $^{-1}$; длина волны $\lambda=6000$ Å.

355. Эшелон Майкельсона состоит из $N=30$ стеклянных пластинок с показателем преломления $n=1,5$; толщина

каждой из них $h=1$ см. Какова должна быть длина b основания стеклянной призмы, чтобы она имела такую же разрешающую способность, что и рассматриваемый эшелон? Дисперсия показателя преломления призмы $dn_{np}/d\lambda = -956 \text{ см}^{-1}$; длина волны $\lambda = 6000 \text{ \AA}$.

356. Ширина заштрихованной части дифракционной решетки равна длине основания призмы из каменной соли. Разрешающая способность решетки в первом порядке равна разрешающей способности призмы для длины волны $\lambda = -5150 \text{ \AA}$. Определить период решетки d , если показатель преломления каменной соли для длины волны $\lambda_1 = 4861 \text{ \AA}$ равен $n_1 = 1,5537$, а для длины волны $\lambda_2 = 5461 \text{ \AA}$ $n_2 = 1,5477$.

357. Стеклянная призма с основанием $b = 10$ см изготовлена из тяжелого флинта, дисперсия которого в окрестности $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ равна $dn/d\lambda = 1000 \text{ см}^{-1}$. Какую максимальную разрешающую способность может иметь дифракционная решетка, ширина заштрихованной части которой равна длине основания этой призмы? Сравнить разрешающую способность такой решетки с разрешающей способностью призмы.

358. На щель спектрографа (с дифракционной решеткой) спроектированы ньютоны кольца, полученные в отраженном белом свете. Щель проходит по одному из диаметров ньютоновых колец. Описать вид спектра, если его порядок и период дифракционной решетки таковы, что углы дифракции ϑ малы, и при расчетах можно положить $\sin \vartheta = \operatorname{tg} \vartheta$. Как изменится картина спектра, если щель не проходит через центр ньютоновых колец, а сдвинута от него в сторону на расстояние a ? Описать качественно, как изменится картина при замене дифракционной решетки призмой.

359. Для рентгеновских лучей не существует линз и сферических зеркал. Для наблюдения дифракции рентгеновских лучей узкий пучок их падает на кристалл или (при скользящем падении) на дифракционную решетку. Дифракционная картина фиксируется на фотопластинке без какой бы то ни было фокусировки. На каком расстоянии l_F от кристалла надо установить фотопластинку, чтобы на ней наблюдалась дифракционная картина Фраунгофера, если ширина пучка падающих рентгеновских лучей $h = 1$ мм, а длина волны $\lambda = 1 \text{ \AA}$? На опыте фотопластинку устанавливают на расстоянии нескольких сантиметров или десятков сантиметров, а для вычисления направлений на дифракционные максимумы пользуются формулами фраунгоферовой диф-

ракции. Приняв во внимание вычисленное значение для l_F , объяснить, почему можно поступать таким образом.

360. Имея в виду решение предыдущей задачи, получить выражение для разрешающей способности (одномерной) дифракционной решетки в рентгеновской области спектра.

361. Диафрагма линзы имеет форму квадрата, длина стороны которого равна D . Точечный монохроматический источник света помещается на главной оптической оси линзы. Найти распределение интенсивности света, получающееся в результате дифракции на краях диафрагмы, в плоскости, перпендикулярной к главной оптической оси и проходящей через фокус геометрического схождения лучей.

362. Оптическая система (труба или микроскоп) дает в качестве изображения светящейся точки систему дифракционных колец. Согласно Рэлею минимальное расстояние между двумя близкими точками, которые еще изображаются раздельно, определяется тем, что центральный светлый кружок колец от первой светящейся точки должен находиться на первое темное кольцо дифракционной картины, даваемой второй светящейся точкой. Ориентировочно можно принять, что глаз способен различить две близкие точки, если максимумы освещенности в местах их геометрических изображений превосходят интенсивность посередине между ними не менее чем на 15 %. Приняв это, проверить, действительно ли при выполнении критерия Рэлея получатся раздельные изображения двух самосветящихся точек.

Указание. Для простоты расчета принять, что диафрагма квадратная. В случае круглой диафрагмы результаты мало отличаются от тех, которые получаются для квадратной диафрагмы. (См. решение предыдущей задачи.)

363. Решить предыдущую задачу в предположении, что изображаемые точки не самосветящиеся, а освещаются одним и тем же источником света. Например, можно взять два круглых отверстия в экране, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними. Рассмотреть качественно три случая: 1) отверстия освещаются пучком лучей, параллельных главной оптической оси; 2) отверстия освещаются параллельными лучами, но наклоненными к главной оптической оси; 3) отверстия освещаются диффузным светом.

364. 1) Считая, что при естественном освещении наибольшее количество света приходится на длину волны около

5500 Å, подсчитать минимальное разрешаемое угловое расстояние для глаза при адаптации на небольшие яркости (диаметр зрачка 4 мм). 2) Найти наименьшее разрешаемое глазом расстояние между штрихами, начертанными на листе бумаги, находящемся на расстоянии ясного зрения (25 см).

365. Каково должно быть увеличение зрительной трубы для того, чтобы полностью использовать разрешающую способность ее объектива?

366. 1) Подсчитать разрешающую способность зрительной трубы с диаметром объектива 5 см. 2) При каком увеличении будет использована полная разрешающая способность этой трубы? Диаметр зрачка глаза $d=5$ мм.

367. Самый большой в мире телескоп сооружен в Советском Союзе и установлен в астрономической обсерватории на северных отрогах Кавказского хребта вблизи станции Зеленчукская. Диаметр зеркала этого телескопа $D=6$ м. Найти разрешаемое им угловое расстояние $\delta\theta$ для длины волны $\lambda=5500$ Å.

368. В чем выгода применения телескопов для рассматривания звезд, если они не дают увеличения по сравнению с невооруженным глазом?

369. Почему в телескоп наиболее яркие звезды, находящиеся вдали от Солнца, можно наблюдать даже днем?

370. При наблюдении в телескоп с нормальным увеличением освещенность изображения звезды на сетчатке глаза в $\alpha=10$ раз меньше освещенности дневного неба, рассматриваемого в тот же телескоп. Во сколько раз надо увеличить диаметр объектива для того, чтобы освещенность изображения звезды на сетчатке стала в $\beta=10$ раз больше освещенности изображения неба, если вместе с объективом телескопа заменен и окуляр таким образом, что увеличение телескопа осталось нормальным?

371. В фокальной плоскости объектива телескопа помещена фотопластинка. Освещенность изображения звезды на фотопластинке в $\alpha=10$ раз меньше освещенности дневного неба. Во сколько раз надо увеличить диаметр объектива, чтобы освещенность изображения звезды на фотопластинке стала в $\beta=10$ раз больше освещенности изображения неба?

372. Ракету, удаляющуюся от Земли, фотографируют, помещая фотопленку в фокальной плоскости объектива астрономического телескопа. При диаметре объектива $D_1=80$ мм дифракционное изображение ракеты становится неразличимым на фоне изображения неба, когда ракета находится на расстоянии $l_1=2 \cdot 10^4$ км от Земли. На каком

расстоянии от Земли l_2 удастся заметить ракету на фотографии, полученной с помощью объектива диаметром $D_2=200$ мм при той же контрастной чувствительности пленки?

373. О зоркости хищных птиц ходят баснословные рассказы. Оцените, на основе дифракционных соображений, может ли орел, летающий над землей на высоте 1 км, разглядеть мышонка размером в 2 см, или он сможет только обнаружить его присутствие.

374. Какова должна быть минимальная длина отрезка на Луне и Солнце, чтобы его изображение в рефлекторе с диаметром зеркала 6 м можно было отличить от изображения точки?

375. Каково должно быть минимальное расстояние между двумя точками на поверхности Марса, чтобы их изображения в телескопе (рефракторе) с диаметром объектива 60 см можно было отличить от изображения одной точки? Считать, что Марс наблюдается в момент великого противостояния, когда расстояние до него от Земли минимально и составляет $56 \cdot 10^6$ км.

376. Точечный источник света находится на некотором расстоянии a от щели ширины D . За щелью на расстоянии b от нее помещен экран, плоскость которого параллельна плоскости щели. Прямая, соединяющая источник света с серединой щели, перпендикулярна к плоскости экрана. Найти приближенное выражение для расстояния x между центральным максимумом и первым дифракционным минимумом на экране, считая, что углы дифракции малы. Найти условие применимости найденного приближенного выражения.

377. При получении изображения с помощью малого отверстия, как в камере-обскуре (принцип стеноскопии), следует считаться с тем, что при слишком малом отверстии изображение начинаетискажаться из-за дифракции; однако увеличение размеров отверстия приведет к уширению пучков света, идущих от каждой точки, и размытию изображения по этим причинам. Считая, что расстояния a и b от предмета до отверстия и от отверстия до изображения остаются неизменными, наивыгоднейший размер отверстия можно приближенно найти из требования, чтобы изображение точки, полученное по правилам геометрической оптики, совпадало по величине с центральным кружком в дифракционной картине на отверстии от той же светящейся точки. Определить наивыгоднейшую величину отверстия.

Указание. Для упрощения вычислений заменить круглое отверстие щелью или квадратным отверстием. (См. предыдущую задачу.)

378. Камера с малым отверстием длиной $L=10$ см предназначена для фотографирования удаленных предметов. Оценить диаметр отверстия D камеры, при котором она имеет наибольшую разрешающую способность. Длина волны $\lambda=5000 \text{ \AA}$.

379. В принципе можно построить телескоп сколь угодно высокой разрешающей способности без объектива, заменив объектив круглым отверстием. Какова должна быть длина L такого телескопа, чтобы он имел ту же разрешающую способность, что и обычный телескоп с диаметром объектива $D=1$ м? Чему будет равна светосила S такого телескопа?

380. Как изменится разрешающая способность объектива телескопа, если его центральную часть закрыть круглым экраном, диаметр которого мал и отличается от диаметра самого объектива?

Указание. При решении задачи круглые объективы и экран заменить квадратными.

381. Производится фотографирование удаленных предметов с помощью объектива телескопа на фотопластинке, помещенной в его фокальной плоскости. Полученный снимок с помощью окуляра того же телескопа проектируется на удаленный экран. Каково должно быть угловое увеличение телескопа, чтобы при этом была использована полностью разрешающая способность объектива телескопа? Изображение на экране рассматривается с того места, где установлен проекционный аппарат.

382. Гальванометр имеет зеркальце диаметром $D=5$ мм. Оценить (учитывая дифракционные эффекты), дальше какого расстояния L не следует отодвигать шкалу от гальванометра, если отсчеты с помощью зрительной трубы можно делать с точностью до $l=0,5$ мм.

383. С какого расстояния r можно увидеть невооруженным глазом свет лазера, генерирующего в непрерывном режиме $P=10$ кВт на частоте $\omega=4 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$, если для формирования луча используется параболическое зеркало с диаметром $D=5$ м? Глаз видит источник, если в зрачок диаметром $d=5$ мм попадает в 1 с $n=60$ квантов излучения, лежащего в зеленой части спектра.

384. Излучение лазера непрерывного действия на волне $\lambda=5000 \text{ \AA}$ мощностью $P=1$ Вт направляется на спутник с помощью телескопа, диаметр объектива которого равен

$D=30$ см. Свет, рассеянный спутником, улавливается другим таким же телескопом и фокусируется на фотоумножитель с пороговой чувствительностью $P_{\text{пор}}=10^{-14}$ Вт. При каких расстояниях l до спутника отраженный сигнал может быть обнаружен, если поверхность спутника равномерно рассеивает падающий на него свет (по закону Ламберта)? Диаметр спутника $d=20$ см.

385. Дифракционные полосы от двух одинаковых параллельных щелей наблюдаются в фокальной плоскости линзы L (рис. 41). S_1 и S_2 — бесконечно удаленные линейные источники монохроматического света, параллельные щелям. При каком угловом расстоянии между S_1 и S_2 дифракционные полосы исчезнут, если расстояние между центрами щелей равно D и велико по сравнению с шириной щели и длиной световой волны λ ?

386. В установке, описанной в предыдущей задаче, источники S_1 и S_2 помещены в фокальной плоскости коллиматорной линзы с фокусным расстоянием f . При каком расстоянии x между S_1 и S_2 дифракционные полосы исчезнут?

387. В установке, описанной в задаче 385, вместо линейных источников S_1 и S_2 применяется один бесконечно удаленный источник, имеющий форму прямоугольника, длинные стороны которого параллельны щелям. Считая, что поверхностная яркость этого источника постоянна, найти угловую ширину источника ϑ , при которой дифракционные полосы исчезают.

Указание. Разбить прямоугольный источник на узкие полосы. Считать каждую из этих полос за линейный источник и воспользоваться решением задачи 385

388. На рис. 42 изображена схема установки Майклельсона, предназначенной для измерения угловых диаметров звезд. Зеркала M_1, M_2, M_3, M_4 , снабженные круглыми диафрагмами, направляют в объектив телескопа два пучка света, интерферирующие друг с другом в фокальной плоскости объектива. Какой вид будет иметь дифракционная картина, наблюдаемая в фокальной плоскости?

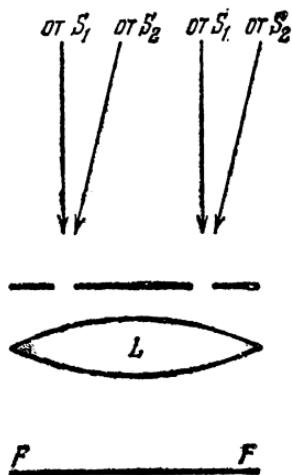


Рис. 41.

389. При каком условии в установке, описанной в предыдущей задаче, исчезнут интерференционные полосы, если источником света служит: 1) двойная звезда; 2) одиночная звезда конечного углового размера? (Для упрощения расчетов можно принять, что звезда имеет форму квадрата с постоянной поверхностной яркостью.) Как будет меняться интерференционная картина при изменении расстояния между зеркалами M_3 и M_4 (рис. 42)?

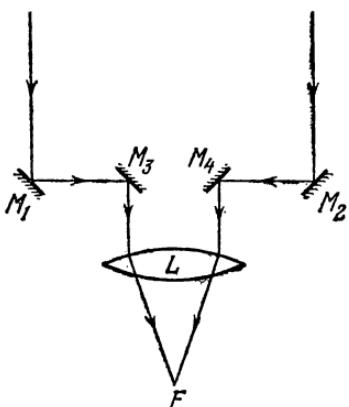


Рис. 42.

390. При измерении углового диаметра гигантской красной звезды Бетельгейзе на установке, схематически описанной в задаче 388, Майкельсон нашел, что интерференционные полосы исчезли, когда расстояние между внешними зеркалами M_1 и M_2 (рис. 42) равнялось 306,5 см. Считая, что эффективная длина волны света от Бетельгейзе равна 5750 \AA , вычислить угловой диаметр этой звезды.

391. В задаче 271 описан способ фотографирования предметов с помощью непрозрачного гладкого шара. Оценить минимальное угловое разрешаемое расстояние $\delta\phi$ при фотографировании удаленных предметов этим способом.

Указание. Размер светлого кружка в центре геометрической тени от точечного источника можно оценить из условия, что первый дифракционный минимум получается, когда разность хода лучей от противоположных точек шара порядка длины волны.

392. Существующие радиотелескопы и радиоустановки, предназначенные для изучения радиоизлучения Солнца и Галактики, обладают малой разрешающей способностью из-за больших длин волн радиоизлучения. 1) Найти минимальное разрешаемое угловое расстояние $\delta\phi$ радиотелескопа с диаметром зеркала $d=50$ м для длин волн $\lambda=1$ м и $\lambda=10$ см.

Для увеличения разрешающей способности предлагалось использовать дифракцию радиоволн от края Луны (см. задачу 294). 2) Оценить разрешающую способность этого метода для тех же волн в предположении, что край Луны действует как тонкий непрозрачный экран, ограниченный прямолинейным краем. 3) Оценить, каковы должны быть вы-

соты h неровностей лунной поверхности, чтобы можно было пользоваться этим методом. Расстояние до Луны $b=380\ 000$ км.

393. Один из принципиально возможных (но практически не осуществимых) способов повышения разрешающей способности радиоустановок для изучения радиоизлучения космических масс состоит в том, чтобы использовать дифракционный максимум интенсивности радиоизлучения, получающийся в центре геометрической тени Луны от точечного источника (ср. с задачей 391). Оценить разрешающую способность этого метода, найти минимальное угловое разрешаемое расстояние для тех же длин волн, что и в предыдущей задаче. Обсудить возможности использования рассматриваемого метода. Диаметр Луны $D=3470$ км.

394. В качестве одного из двух зеркал (антенн) радиоинтерферометра можно использовать пассивный отражатель, например, морскую поверхность. Определить угловое разрешение интерферометра для волны с длиной $\lambda=1$ м, антenna которого расположена над морем на скале высотой $h=500$ м.

Указание. Диаграммы направленности антенн для приема и для испускания излучения одинаковы. (Это следует из теоремы взаимности, см. задачу 695).

395. Каково минимальное угловое разрешение радиоинтерферометра, установленного на Земле, при работе на волне $\lambda=10$ м?

396. Каково угловое разрешение радиоинтерферометра, одна из антенн которого помещена на искусственном спутнике Луны? Предполагается, что используется отражение от лунной поверхности; ее следует считать плоской, так как рассматривается спутник, летящий на небольшой высоте. Время обращения спутника по круговой орбите вокруг Луны равно 10^4 с, длина волны $\lambda=100$ м. Почему в данном случае желательно использовать спутник Луны, а не Земли?

397. Какова форма главного лепестка диаграммы направленности приемной антенны в виде полосы шириной d , «вырезанной» из параболического рефлектора диаметром D ?

398. Определить минимальное разрешаемое расстояние δ микроскопа при наилучших условиях освещения для: 1) безиммерсионного объектива с числовой апертурой $a=-0,9$; 2) того же объектива, но с масляной иммерсией ($n=1,6$). Длина волны при визуальных наблюдениях $\lambda=-5500$ Å.

399. 1) Во сколько раз можно повысить разрешающую способность микроскопа, перейдя к фотографированию в ультрафиолетовых лучах ($\lambda=2700 \text{ \AA}$) по сравнению с фотографированием в зеленых лучах? 2) Подсчитать наименьшее расстояние между штрихами, которое разрешит ультрафиолетовый микроскоп с иммерсией (использовать данные предыдущей задачи). 3) Какое необходимо увеличение объектива микроскопа, чтобы на фотографической пластинке, помещенной в плоскости изображения, даваемого объективом, наименьшие разрешаемые детали имели размеры порядка 0,5 мм?

400. Каково должно быть увеличение микроскопа, чтобы полностью использовать разрешающую способность его объектива?

401. Проволочная сетка, ячейки которой имеют форму квадратов, проецируется собирающей линзой на экран. В задней фокальной плоскости линзы помещена узкая щель. Как будет меняться картина на экране при вращении щели вокруг главной оптической оси линзы? Как изменится картина при увеличении ширины щели?

402. С помощью объектива микроскопа получена микрофотография малого объекта (например, растительных клеток или бактерий) с линейным увеличением N . Тот же объектив был использован для проектирования полученной микрофотографии на удаленный экран. Каково должно быть минимальное значение увеличения N , чтобы полностью была использована разрешающая способность микроскопа? Диаметр апертурной диафрагмы объектива равен D , диаметр зрачка глаза d . Изображение на экране рассматривается с места нахождения объектива.

403. Каково должно быть фокусное расстояние f_2 окуляра микроскопа, чтобы была полностью использована разрешающая способность объектива? Числовая апертура объектива равна $n \sin \alpha$, фокусное расстояние объектива f_1 , длина тубуса (трубы микроскопа) l . Длину тубуса можно считать равной расстоянию между объективом и плоскостью первого изображения (т. е. изображения, даваемого объективом).

404. С помощью объектива телескопа с диаметром D и фокусным расстоянием f производится фотографирование удаленных объектов на мелкозернистой пластинке, помещенной в фокальной плоскости объектива. Полученное изображение рассматривается в микроскоп с числовой апертурой $n \sin \alpha$ и увеличением N . Каким условиям должны

удовлетворять числовая апертура и увеличение микроскопа, чтобы полностью использовать разрешающую способность объектива телескопа?

405. Современные фотопластинки способны разрешать до $z=10^4$ линий на сантиметр. Какую светосилу (т. е. отношение квадратов диаметра D и фокусного расстояния f) должен иметь объектив фотоаппарата, чтобы полностью использовать разрешающую способность пленки?

406. В кювету, имеющую форму прямоугольного параллелепипеда, налит толуол, в котором возбуждаются ультразвуковые волны с помощью колебаний пластинки пьезокварца. Пластинка кварца установлена параллельно боковым стенкам кюветы. Ультразвуковые волны, возбуж-

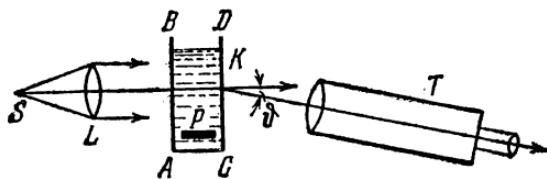


Рис. 43.

даемые пластинкой, отражаются от одной из боковых стенок кюветы. В результате в жидкости образуется стоячая ультразвуковая волна. Чему равен пространственный период изменения показателя преломления жидкости при наличии в ней стоячей ультразвуковой волны?

407. На рис. 43 изображена схема установки для наблюдения дифракции света на ультразвуке. Стоячие ультразвуковые волны образуются в кювете K . Пластинка кварца P установлена параллельно стенке AC , так что волны, излучаемые ею, распространяются в направлении, параллельном AB . Дифракционные максимумы и минимумы наблюдаются в трубе T , установленную на бесконечность. Показать, что угол дифракции ϑ для максимума m -го порядка определяется из условия $\Delta \sin \vartheta = m\lambda$.

Указание. Принять во внимание, что частота ультразвуковых колебаний весьма мала по сравнению с частотой световых колебаний.

408. Дифракция света на ультразвуковой волне в толуоле наблюдается на установке, описанной в предыдущей задаче. В качестве источника света использована зеленая линия ртути ($\lambda=5461 \text{ \AA}$). Вместо трубы T за кюветой поставлена собирающая линза с фокусным расстоянием

$f=30$ см. Дифракционные полосы получаются в фокальной плоскости линзы и рассматриваются в микроскоп, снабженный шкалой. Определить скорость звука v в толуоле, если расстояние между двумя соседними максимумами $\Delta x=0,546$ мм, а частота ультразвука $v=4000$ кГц.

409. Можно ли по характеру дифракционной картины Фраунгофера на плоской ультразвуковой волне решить, происходит ли дифракция на бегущей или стоячей ультразвуковой волне? Поглощением ультразвука пренебречь.

410. Если жидкость, в которой установилась стоячая ультразвуковая волна, рассматривать в микроскоп, то благодаря неоднородности жидкости будут видны светлые и темные полосы. Чему равно расстояние между двумя соседними светлыми или темными полосами?

411. Как изменится результат решения задачи 407, если не пренебречь частотой ультразвуковых колебаний по сравнению с частотой световых колебаний?

§ 5. Элементы голографии

412. Плоская монохроматическая волна падает под углом ϑ на экран \mathcal{E} , плоскость которого перпендикулярна к плоскости рис. 44, и принята за координатную плоскость XY

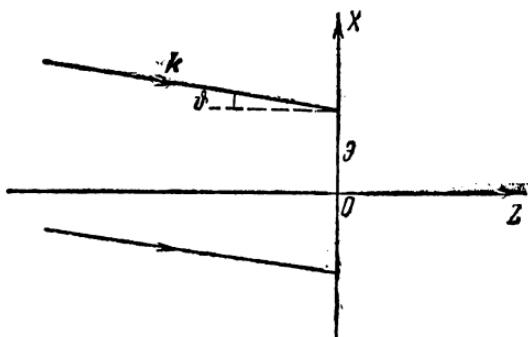


Рис. 44.

с началом координат в точке O . Нормаль к волне также лежит в плоскости рисунка. Найти распределение фазы волны $\Phi(x)$ в плоскости этого экрана в зависимости от координаты x . За нулевую принять фазу волны в начале координат O . Записать выражение для напряженности поля волны E_p в произвольной точке P экрана, выразив ее через напряжен-

нность E_0 поля в точке O в тот же момент времени. Задать падающую волну в виде

$$\vec{E} = A_0 \exp [i(\omega t + kx \sin \vartheta - kz \cos \vartheta)].$$

Изменится ли результат решения предложенной задачи, если x -компоненты волнового вектора \vec{k} падающей волны изменит знак на противоположный?

413. Точечный источник S монохроматической волны находится на расстоянии r_0 от экрана \mathcal{E} , плоскость которого

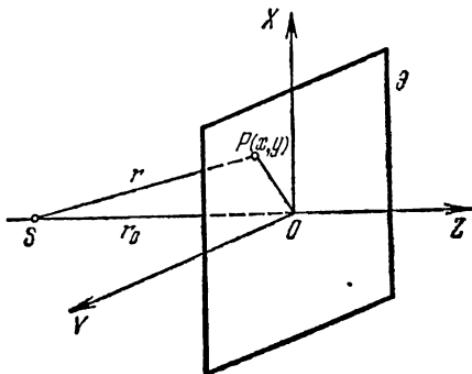


Рис. 45.

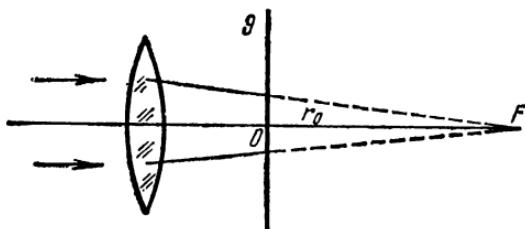


Рис. 46.

принята за координатную плоскость XY с началом в точке O (рис. 45). Найти распределение фазы Φ этой волны на экране в зависимости от координат x, y , принимая фазу той же волны в точке O за нулевую. Выразить напряженность электрического поля E_P в произвольной точке P экрана через напряженность E_0 в точке O в тот же момент времени и координаты x, y точки P , считая, что расстояние точки P от точки O много меньше r_0 (точнее, $(x^2+y^2)^2 \ll \lambda r_0^3$).

414. Найти распределение фазы волны Φ в плоскости экрана \mathcal{E} в оптической схеме, представленной на рис. 46.

Экран расположен на расстоянии r_0 от фокуса линзы F . Принять фазу этой волны в точке O за нулевую. Выразить величину напряженности электрического поля E_P в произвольной точке P экрана в зависимости от координат x , y этой точки и напряженности E_0 поля в точке O в тот же момент времени. Принять, что поперечные размеры пучка малы сравнительно с r_0 (точнее, $(x^2+y^2)^{1/2} \ll \lambda r_0^3$). Координатные оси выбраны так же, как в предыдущей задаче.

415. Для получения голограммы плоской волны может быть использована следующая схема: плоская опорная волна с амплитудой E_0 и длиной волны λ падает нормально на фотопластинку. Другая плоская волна (предметная) с амплитудой E_1 падает на ту же фотопластинку под углом ϑ . Фотографическая пластинка проэкспонирована и проявлена таким образом, что рабочий диапазон кривой почернения не выходит за пределы линейного участка характеристической кривой фотоэмульсии¹⁾. 1) Найти амплитудную прозрачность $D(x)$ голограммы, принимая, что амплитуда опорной волны E_0 много больше амплитуды E_1 предметной волны. 2) Каково расстояние d между линиями равного почернения на полученной голограмме?

416. Вывести уравнение Габора (т. е. найти амплитудную прозрачность D) для частного случая, когда на фотопластинку падают две когерентные монохроматические

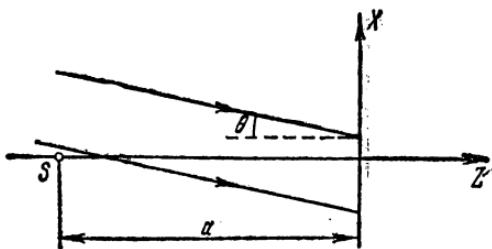


Рис. 47.

волны: плоская опорная волна с амплитудой поля E_0 и сферическая предметная волна, расходящаяся из точки S (рис. 47). Амплитуду сферической предметной волны E_1 в плоскости фотопластиинки полагать не зависящей от координат x , y точек фотопластиинки, причем $E_0 \gg E_1$. Выражение

¹⁾ Характеристической кривой фотоэмульсии в голографии называют кривую зависимости логарифма пропускания света по интенсивности от логарифма интенсивности падающего света.

для плоской опорной волны записать, как указано в задаче 412.

417. Пусть голограмма сферической волны, рассчитанная в задаче 416, просвечивается пучком монохроматического света, как показано на рис. 48. Пользуясь найденным

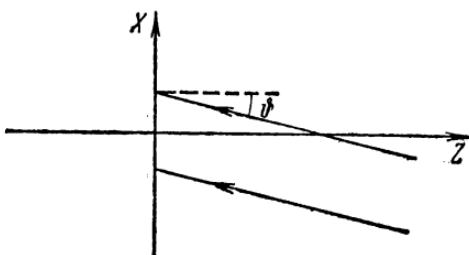


Рис. 48.

ранее частным случаем уравнения Габора, найти волновое поле за голограммой, т. е. выяснить, какие плоские и сферические волны (сходящиеся или расходящиеся) будут распространяться за голограммой. Найти пространственную локализацию точек, из которых будут распространяться (в которых будут сходиться) сферические волны за голограммой (перед голограммой).

418. Показать, что голограмма, рассчитанная для оптической схемы, приведенной в задаче 416 (рис. 47), при условии $\vartheta=0$, будет аналогом зонной пластинки Френеля с пропускаемостью

$$D(x) = 2E_0^2 - \gamma E^2 - 2\gamma E_0 E \cos \left[\frac{\pi}{\lambda a} (x^2 + y^2) \right].$$

Найти фокусные расстояния этой зонной пластинки и нарисовать ход световых пучков за этой пластинкой, при просвечивании ее пучком света, падающим нормально на пластинку. Как изменяются фокусные расстояния пластинки, если она будет просвечиваться монохроматическим светом с длиной волны $\lambda' \neq \lambda$, где λ — длина волны света, использованного при записи голограммы?

419. Плоская монохроматическая волна падает нормально на толстослойную фотопластинку и, пройдя через слой фотоэмulsionии, отражается от зеркала З, диаметр которого мал по сравнению с длиной волны, так что отраженную волну можно считать сферической (рис. 49). Зеркало З расположено на расстоянии a от плоскости пластинки. Следует

иметь в виду, что голографические пластиинки с толстым слоем фотоэмulsionии (15—20 мкм) прозрачны для света. Найти уравнения поверхностей максимального почернения в слое

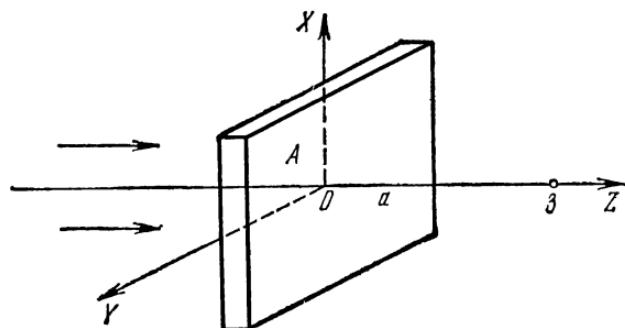


Рис. 49.

эмulsionии фотопластинки. Считать, что толщина слоя фотоэмulsionии мала по сравнению с a и что диаметр исходного светового пучка также мал по сравнению с a . Найти расстояние Δz между вершинами найденных поверхностей. Принять показатель преломления эмульсии равным единице.

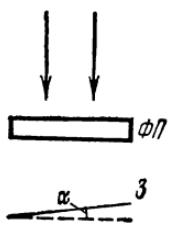


Рис. 50. 420. Плоская монохроматическая опорная волна падает нормально на толстослойную фотопластинку $\Phi\pi$. Пройдя фотопластинку, волна отражается от плоского зеркала $З$, расположенного под малым углом α к плоскости фотопластинки. Попадая на фотопластинку, отраженная волна, называемая в дальнейшем предметной, интерферирует с исходной волной (рис. 50). Найти уравнения поверхностей максимального почернения в фотоэмulsionии. Каково расстояние между соседними поверхностями максимального почернения? Принять показатель преломления эмульсии равным единице.

421. Для измерения модуля Юнга методом голографической интерферометрии может быть использована оптическая схема, горизонтальное сечение которой представлено на рис. 51. Параллельный пучок света от лазера, работающего в одномодовом режиме, проходит через расширяющую его сечение телескопическую систему TC и с помощью полупрозрачного зеркала $З_1$ разделяется на два пучка. Опорная

волна отражается от зеркала Z_2 и падает под углом ϑ на фотопластинку $\Phi\pi$.

Второй световой пучок, отразившись от зеркала Z_3 и пройдя через полупрозрачную пластинку P , падает на изучаемую металлическую пластинку $M\pi$. Эта металлическая

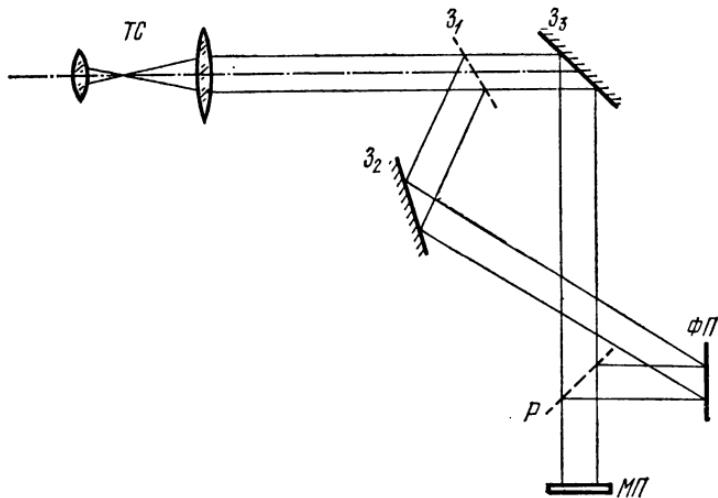


Рис. 51.

пластинка в нижней своей части жестко закреплена (рис. 52), а к ее верхней части, когда это необходимо, прикладывается сила F , отчего пластинка может деформироваться (изгибаться). Световая волна, отразившаяся от металлической $M\pi$ и светоразделительной P пластинок, падает нормально на фотопластинку. (Эта волна является в данном случае предметной волной.) На фотопластинке регистрируется интерференционная картина от двух волн: предметной и опорной.

После этого на ту же непроявленную пластинку делается вновь снимок интерференционной картины от опорной волны и волны, отразившейся от уже деформированной металлической пластинки. Наконец, фотопластинка проявляется, и на ней оказываются записанными две голограммы: недеформированной и деформированной металлической пластинки.



Рис. 52.

Опишите, как будет выглядеть на экране восстановленное изображение металлической пластиинки, если освещать комбинированную голограмму параллельным пучком света, падающим на голограмму под углом ϑ со стороны стекла. Экран для наблюдения изображения располагается параллельно голограмме и на том же расстоянии от нее, на котором располагалась металлическая пластиинка от фотопластиинки при записи на ней голограмм.

Как из полученной картины найти модуль Юнга? (В теории упругости доказывается, что деформация пластиинки δ связана с расстоянием x от закрепленного конца пластиинки соотношением $x^2 = \frac{E\delta ab^3}{6Fl}$, где l — длина, a — ширина, b — толщина пластиинки.)

§ 6. Поляризация света. Формулы Френеля

422. Зонная пластиинка сделана из поляроида. Во всех четных зонах поляроид ориентирован вертикально, во всех нечетных — горизонтально. Какова будет интенсивность света в основном фокусе пластиинки, если она освещается неполяризованным светом?

423. Бесконечный экран состоит из двух поляроидных полуплоскостей, граничащих друг с другом вдоль прямой. Главное направление одной из полуплоскостей параллельно, а другой перпендикулярно к этой прямой. На экран перпендикулярно к его поверхности падает пучок параллельных лучей естественного света с длиной волны λ . Описать качественно дифракционную картину, получающуюся за экраном.

424. Как изменится разрешающая сила дифракционной решетки, если одну ее половину прикрыть поляроидом, ориентированным параллельно штрихам решетки, а другую половину — поляроидом, ориентированным перпендикулярно к штрихам? Будет ли зависеть разрешающая сила решетки от поляризации падающего света?

425. В предыдущей задаче перед и за решеткой дополнительно ставятся два поляроида, главные направления которых параллельны друг другу и образуют угол 45° с направлением штрихов решетки. Как изменится разрешающая способность такой решетки по сравнению с ничем не прикрытой решеткой?

426. Исходя непосредственно из граничных условий для электрического и магнитного полей на границе вакуума и

диэлектрика, найти коэффициент отражения ρ света при нормальном падении на границу раздела. Выразить коэффициент отражения через показатель преломления диэлектрика n . Найти значения ρ для отражения света от поверхности воды ($n=1,33$) и стекла ($n=1,5$).

427. Найти коэффициент пропускания σ при нормальном падении света из воздуха на стекло с показателем преломления $n=1,5$.

428. Сколько процентов светового потока теряется на отражение в призматическом бинокле? Показатель преломления стекла призм и линз равен 1,5. Схема бинокля дана на рис. 53.

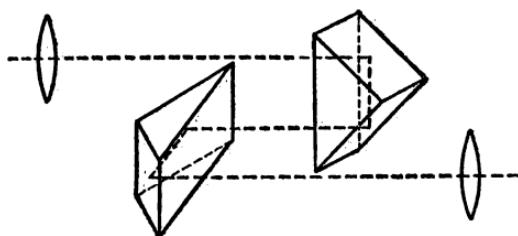


Рис. 53.

429. Проверить с помощью формул Френеля, что поток энергии падающей волны через границу раздела сред равен сумме потоков энергии преломленной и отраженной волн через ту же границу.

430. Пользуясь формулами Френеля, показать, что линейно-поляризованный свет остается линейно-поляризованным после отражения на границе раздела двух прозрачных изотропных сред во всех случаях, за исключением случаев полного внутреннего отражения.

431. Угол между плоскостью колебаний поляризованного света и плоскостью падения называется азимутом колебания. Найти азимут преломленной волны δ и азимут отраженной волны ρ , если азимут падающей волны α , а угол падения φ .

432. 1) Найти угол полной поляризации для света, отраженного от стекла с показателем преломления $n=1,5$.
2) Найти степень поляризации преломленного света

$\Delta = \frac{I_s - I_p}{I_s + I_p}$ при падении света под этим углом. Падающий свет — естественный.

433. Под каким углом нужно отразить луч от кристалла каменной соли ($n=1,544$), чтобы получить максимальную поляризацию отраженного луча? Падающий свет — естественный.

434. Естественный свет падает под углом Брюстера из воздуха на поверхность стекла с показателем преломления $n=1,5$. Найти интенсивность I_r , отраженного света, приняв за единицу интенсивность падающего света I_e .

435. Естественный свет падает под углом Брюстера из воздуха на поверхность диэлектрика с показателем преломления n . Найти амплитуду D_p преломленной волны, электрический вектор которой лежит в плоскости падения, если амплитуда падающей волны с электрическим вектором, лежащим в той же плоскости, равна Φ_p .

436. На боковую грань призмы, изготовленной из стекла с показателем преломления $n=1,5$, падает под углом Брюстера Φ_B световой пучок, электрический вектор которого лежит в плоскости падения. Каким должен быть преломляющий угол A призмы, чтобы свет прошел через нее, не испытав потерь на отражение?

437. При каких условиях луч света, падающий на боковую грань прозрачной изотропной призмы с преломляющим углом $A=60^\circ$, проходит через нее без потерь на отражение?

438. Плоско-выпуклая стеклянная линза с малой кривизной сферической поверхности лежит на плоской металлической поверхности. Будут ли наблюдаться кольца Ньютона, если на линзу под углом Брюстера падает свет, поляризованный: 1) в плоскости падения; 2) перпендикулярно к плоскости падения?

439. В системе для получения колец Ньютона плоско-выпуклая линза сделана из стекла с показателем преломления n_1 и положена на плоскую стеклянную поверхность, показатель преломления которой n_2 сильно отличается от n_1 . Система освещается параллельным пучком света, прошедшим через поляризационную призму, а кольца наблюдаются в отраженном свете. Описать качественно, как будет меняться видимость колец при изменении угла падения, если падающий свет поляризован перпендикулярно к плоскости падения. Что изменится, если падающий свет будет поляризован в плоскости падения?

440. Свет падает из среды 1 на среду 2 под углом ϕ и преломляется под углом ψ . Доказать, что коэффициент отражения не изменится, если свет будет падать из среды 2 на среду 1 под углом ψ .

441. При однократном отражении света комплексная амплитуда R отраженной волны связана с амплитудой \mathcal{E} падающей волны соотношением $R=r\mathcal{E}$, а амплитуда прошедшей волны D — соотношением $D=d\mathcal{E}$. Величины r и d называются коэффициентами Френеля. Они зависят от поляризации света и определяются формулами Френеля для s - и p -составляющих падающей волны. Пользуясь формулами Френеля, показать, что эти коэффициенты связаны соотношениями

$$r' = -r, \quad r^2 + dd' = 1, \quad (441.1)$$

где «штрихованными» буквами обозначены коэффициенты Френеля, относящиеся к «обратному ходу» волны.

442. На плоскую поверхность отражающей среды нанесен слой прозрачного диэлектрика толщины l с показателем преломления n . Падающая волна поляризована либо в плоскости падения, либо перпендикулярно к ней. Найти связь между комплексными амплитудами \mathcal{E} и R падающей и отраженной волн, если коэффициенты Френеля на верхней и нижней границах слоя (для прямого прохождения света) равны соответственно r_1 и r_2 .

443. Пользуясь формулами Френеля, показать, что при отражении плоской электромагнитной волны от идеального зеркала, покрытого сверху слоем прозрачного диэлектрика, амплитуда отраженной волны равна амплитуде падающей. Изменяется лишь фаза волны, как это и должно быть согласно закону сохранения энергии.

444. В оптических приборах потери света при прохождении через прибор происходят главным образом вследствие отражения света от поверхностей оптических деталей. Для увеличения поверхностной прозрачности стекла его поверхность покрывают тонкой пленкой, показатель преломления которой меньше показателя преломления стекла. Каковы должны быть толщина пленки и ее показатель преломления, чтобы отражательная способность стекла обратилась в нуль?

445. Имеются две параллельные полупрозрачные плоскости. Коэффициенты отражения и пропускания первой из них равны ρ_1 и σ_1 , а второй ρ_2 и σ_2 соответственно. Степень монохроматичности падающего света невелика, так что правильной интерференции не происходит, а имеет место сложение интенсивностей света. Найти коэффициенты отражения ρ и пропускания σ для совокупности обеих плоскостей.

446. Имеется m параллельных полупрозрачных плоскостей. Коэффициенты отражения и пропускания каждой из них равны ρ и σ . Найти коэффициент отражения ρ_m и коэффициент пропускания σ_m всей системы m плоскостей. (Относительно падающего света см. предыдущую задачу.)

447. Стопа Столетова состоит из плоскопараллельных стеклянных пластинок с показателем преломления $n=1,5$. На нее под углом Брюстера падает свет, поляризованный в плоскости падения. Начертить график для коэффициентов отражения и пропускания стопы в зависимости от числа N пластинок.

448. Естественный свет падает под углом φ на стопу Столетова, состоящую из N стеклянных пластинок с показателем преломления n . Найти степени поляризации Δ и Δ' прошедшего и отраженного света, а также отношение интенсивностей I_s/I_p главных компонент прошедшего света.

449. Найти степень поляризации света, отраженного от поверхности стекла под углами 0° , 45° , $56^\circ 51'$ и 90° (показатель преломления стекла $n=1,53$). Падающий свет — естественный.

450. Найти степень поляризации преломленного луча по выходе его из стеклянной пластинки с показателем преломления $n=1,5$ при углах падения 20° , 45° , 60° и 80° . Падающий свет — естественный.

451. Стопа Столетова состоит из десяти тонких плоскопараллельных стеклянных пластинок, на которые луч падает под углом полной поляризации. Вычислить степень поляризации преломленного луча в зависимости от числа N проходимых им пластинок ($n=1,5$). Падающий свет — естественный.

452. На опыте наблюдаются отступления от формул Френеля для отражения света от прозрачных изотропных сред. Они в основном сводятся к двум: 1) не существует угла полной поляризации, при котором свет с электрическим вектором, лежащим в плоскости падения, не отражается совсем; 2) при отражении линейно-поляризованного света, плоскость колебаний которого не совпадает с плоскостью падения и не перпендикулярна к ней, получается эллиптическая поляризация, особенно отчетливо заметная в окрестности угла Брюстера (т. е. угла падения $\varphi=\arctg n$). Показать, что каждое из этих отступлений является следствием другого.

453. При выводе формул Френеля предполагается, что магнитная проницаемость μ среды равна единице. Как из-

меняются формулы Френеля, если не вводить этого предположения?

454. Будет ли существовать угол полной поляризации, если магнитные проницаемости μ_1 и μ_2 граничащих сред отличны от единицы?

455. Показать, что отражательная способность среды, для которой $\epsilon = \mu$ (ϵ — диэлектрическая, μ — магнитная проницаемости), равна нулю.

456. Две монохроматические волны, линейно-поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях, распространяются в одном направлении. В результате их наложения в общем случае получается свет, поляризованный по эллипсу. Как определить, зная разность фаз между складывающимися волнами, будет ли поляризация правой или левой?

457. Рассчитать преломляющий угол параллелепипеда Френеля, сделанного из стекла с показателем преломления $n=1,7$.

458. Азимут колебаний падающей линейно-поляризованной волны равен $+45^\circ$. Какая получится эллиптическая поляризация отраженного света на границе стекло — воздух, правая или левая¹⁾?

459. При каком угле падения ϕ разность фаз δ между компонентой отраженной волны, поляризованной в плоскости падения, и компонентой, поляризованной перпендикулярно к ней, достигает максимума при полном внутреннем отражении, если падающая волна линейно-поляризована? Чему равен этот максимум?

460. Каким показателем преломления n должно обладать вещество, чтобы при помощи однократного полного внутреннего отражения на границе его с воздухом можно было превращать линейно-поляризованный свет в поляризованный по кругу? Азимут колебаний падающего света равен 45° .

461. Падающий свет поляризован линейно с азимутом колебаний, равным $+45^\circ$. Можно ли путем однократного отражения превратить его в свет, поляризованный по правому кругу?

462. Какой должен быть минимальный показатель преломления параллелепипеда Френеля, чтобы при азимуте

¹⁾ Азимут колебаний падающей волны может изменяться от $-\pi/2$ до $+\pi/2$. Он считается положительным, если $\mathcal{E}_p/\mathcal{E}_s > 0$, и отрицательным, если $\mathcal{E}_p/\mathcal{E}_s < 0$.

колебаний падающего света в $+45^\circ$ выходящий свет был поляризован по правому кругу?

463. Линейно-поляризованныя электромагнитная волна с азимутом колебаний, равным $+135^\circ$, отражается на границе вода — воздух. Диэлектрическая проницаемость воды $\epsilon = 81$. Под каким углом должна падать эта волна, чтобы отраженная волна получилась поляризованной по кругу? Какая при этом будет поляризация: правая или левая?

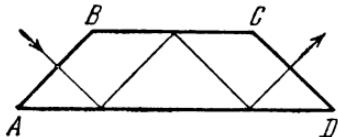


Рис. 54.

Линейно-поляризованный луч с азимутом колебаний $+135^\circ$ падает перпендикулярно на грань AB стеклянной призмы $ABCD$ (рис. 54) и, испытав три раза полное внутреннее отражение, выходит из нее. Каков должен быть преломляющий угол A призмы, чтобы вышедший свет был поляризован по кругу, если показатель преломления стекла призмы равен 1,52? Какая получится поляризация вышедшего света: правая или левая?

465. Каким должен быть минимальный показатель преломления призмы, описанной в предыдущей задаче, чтобы при азимуте колебаний падающего света, равном $+45^\circ$, выходящий свет был поляризован по правому кругу? Какой при этом должен быть угол A ?

466. С помощью векторной диаграммы показать, что скачок фазы при полном внутреннем отражении превосходит вдвое скачок фазы, испытываемый преломленной (поверхностной) волной.

467. Каким должен быть показатель преломления среды, чтобы коэффициент отражения естественного света имел минимум при угле падения между 0 и 90° ?

468. Линейно-поляризованныя электромагнитная волна с амплитудой электрического вектора \mathcal{E} падает нормально из среды с показателем преломления n_1 на среду с показателем n_2 . Среды разделены переходным слоем толщины l , в котором показатель преломления n непрерывно изменяется от значения n_1 на верхней границе до значения n_2 на нижней границе по закону: $n = \frac{C}{z+a}$, где C и a — постоянные. (Ось Z направлена нормально к слою.) Выразить показатель преломления слоя n через n_1 , n_2 , z , l . Найти: 1) электромагнитное поле внутри слоя; 2) амплитуды R и D отраженной и прошедшей волн; 3) коэффициент отражения ρ .

Исследовать предельные случаи тонкого и толстого переходных слоев.

469. Показать, что в плоскослоистой непоглощающей среде, т. е. в среде, показатель преломления которой $n(\omega, z)$ меняется только в одном направлении, монохроматическая электромагнитная волна $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(z)e^{i\omega t}$, распространяющаяся в том же направлении, поперечна и что вектор \mathbf{E} удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\mathbf{E}}{dt^2} + \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega, z) \mathbf{E} = 0. \quad (469.1)$$

Показать, что если функция $n(z)$ меняется медленно, то приближенным решением (469.1) является

$$\mathbf{E} = \frac{\text{const}}{\sqrt{n}} \exp \left\{ \pm i \frac{\omega}{c} \int_{z_0}^z n(z) dz \right\} \quad (469.2)$$

(приближение геометрической оптики). Сформулировать условия, при выполнении которых (469.2) является приближенным решением уравнения (469.1).

470. Показать, что в приближении геометрической оптики (т. е. когда справедливо решение (469.2), см. предыдущую задачу) волны, бегущие в разные стороны (знаки \pm в решении (469.2)), распространяются без отражения.

471. Показать, что выражения

$$\mathbf{E} = \frac{\text{const}}{\sqrt{f(z)}} \exp \left\{ \pm i \frac{\omega}{c} \int_{z_0}^z f(z) dz \right\}$$

являются точными решениями уравнения (469.1), если

$$n^2(z) = f^2(z) + \frac{c^2}{2\omega^2} \left[\frac{(df/dz)^2}{f} - \frac{3}{2} \frac{(df/dz)^2}{f^2} \right].$$

Показать, что в этом случае волны бегут в обоих направлениях без всякого отражения.

472. Две слоистые прозрачные среды с медленно изменяющимися показателями преломления $n(z)$ граничат друг с другом вдоль плоскости $z=\text{const}$, на которой показатель преломления $n(z)$ непрерывен, а его производная dn/dz претерпевает разрыв. На границу раздела нормально к ней из первой среды падает плоская монохроматическая волна.

Считая, что условия применимости геометрической оптики в каждой из сред выполнены (см. задачу 469), найти выражение для амплитуды отраженной волны и коэффициент отражения.

§ 7. Кристаллооптика

473. Найти связь между векторами D , E , H и единичным вектором волновой нормали N , т. е. нормали к фронту плоской волны, распространяющейся в прозрачной однородной кристаллической среде.

474. Показать, что: 1) в плоской электромагнитной волне, распространяющейся в кристалле, векторы D , E , N и вектор плотности потока электромагнитной энергии S перпендикулярны к вектору H ; 2) векторы D и H взаимно перпендикулярны и перпендикулярны к волновой нормали N ; 3) вектор S перпендикулярен к E и H ; 4) угол между векторами D и E равен углу между векторами S и N .

475. Диэлектрические свойства так называемого одноосного кристалла симметричны относительно некоторого направления, называемого оптической осью кристалла и выражаются следующими формулами:

$$D_{\parallel} = \epsilon_{\parallel} E_{\parallel}, \quad D_{\perp} = \epsilon_{\perp} E_{\perp}, \quad (475.1)$$

где E_{\parallel} и E_{\perp} — составляющие электрического вектора E , параллельные и перпендикулярные к оптической оси соответственно, D_{\parallel} и D_{\perp} имеют такой же смысл для вектора D , ϵ_{\parallel} и ϵ_{\perp} — материальные постоянные, называемые диэлектрическими проницаемостями кристалла. Плоскость, проходящая через оптическую ось и волновую нормаль, называется главным сечением кристалла. Определить скорость распространения электромагнитной волны в кристалле вдоль волновой нормали N в случаях: 1) когда вектор D перпендикулярен к главному сечению; 2) когда вектор D параллелен главному сечению.

476. Как будет вести себя в общем случае плоская электромагнитная волна в одноосном кристалле при фиксированном направлении волновой нормали?

477. Почему световой пучок, нормально падающий на поверхность кристалла, вообще говоря, испытывает двойное преломление, т. е. пространственно разделяется в кристалле на обычновенный и необыкновенный пучки. Лежат

ли преломленные лучи и нормали к волновым фронтам в плоскости падения?

478. Почему, если через плоскопараллельную двупреломляющую кристаллическую пластинку смотреть на удаленный предмет, видно одно изображение, а не два, как в случае близко расположенных предметов?

479. Наблюдатель смотрит на близкий предмет через плоскопараллельную двупреломляющую пластинку из исландского шпата и видит два прямых увеличенных изображения предмета, когда между пластинкой и предметом помещена собирающая линза на расстоянии 4 см от предмета. После того как к линзе вплотную приложили собирающее очковое стекло с оптической силой в 5 диоптрий, стало видно только одно изображение предмета. Определить фокусное расстояние f линзы.

480. Из двупреломляющего кристалла сделана трехгранная призма для измерения показателей преломления по углам отклонения выходящих лучей от первоначального направления. Будут ли измеренные показатели преломления давать отношения скорости света в вакууме к нормальнym или же к лучевым скоростям света в кристалле?

481. Как надо на кристалл-рефрактометре ориентировать пластинку, вырезанную произвольным образом из одноосного кристалла, чтобы получить оба главных показателя преломления кристалла?

482. При измерении показателей преломления кристаллической пластинки на кристалл-рефрактометре оказалось, что один показатель преломления постоянен при всех поворотах полушария и равен 1,646, а другой меняется от 1,642 до 1,646. Определить оптический знак кристалла¹⁾ и ориентировку пластинки относительно оптической оси.

483. Как будут изменяться величины показателей преломления пластинки из того же вещества, что и в предыдущей задаче, если пластинка вырезана перпендикулярно к оптической оси?

484. Как надо вырезать призму из одноосного кристалла, чтобы методом наименьшего отклонения получить оба главных показателя преломления?

485. Почему видимая толщина пластинки исландского шпата, измеренная оптическим путем с помощью поляриза-

¹⁾ Одноосный кристалл называется положительным, если показатель преломления обыкновенной волны n_o меньше показателя преломления необыкновенной волны n_e ($n_o < n_e$). В противоположном случае ($n_o > n_e$) кристалл называется отрицательным.

ционного микроскопа, имеет два разных значения a_1 и d_2 ? Как надо вырезать пластинку, чтобы d_1 и d_2 получили экстремальные значения? Найти эти экстремальные значения, если толщина пластинки 1 мм. Для исландского шпата обыкновенный и необыкновенный показатели преломления равны: $n_o=1,658$, $n_e=1,486$. (См. задачу 30.)

486. Узкий пучок неполяризованного света падает нормально на пластинку исландского шпата и затем нормально

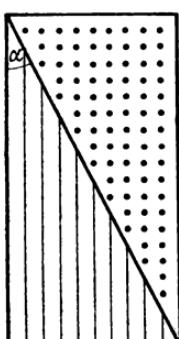


Рис. 55.

на вторую такую же пластинку, главная плоскость которой образует с главной плоскостью первой пластинки угол 30° . Свет попадает на экран. Описать полученную картину и найти относительную интенсивность наблюдаемых на экране пятен.

П р и м е ч а н и е. Пластинки вырезаны так, что оптическая ось составляет угол γ с плоскостью пластинки. При этом $0 \leq \gamma < 90^\circ$.

487. Главные плоскости двух призм Николя образуют между собой угол 30° .

Как изменится интенсивность прошедшего света, если главные плоскости поставить под углом 45° ?

488. Ветровое стекло и фары автомашин снабжаются пластинками из поляроида. Как должны быть расположены эти пластинки, чтобы шофер мог видеть дорогу, освещенную светом его фар, и не страдал бы от света фар встречных машин?

489. Призма Волластона (рис. 55) сделана из исландского шпата ($n_o=1,658$, $n_e=1,486$). Угол $\alpha=15^\circ$. Рассчитать, на какой угол φ будут разведены обыкновенный и необыкновенный лучи.

490. Параллельный пучок света падает нормально на пластинку исландского шпата, вырезанную параллельно оптической оси. Определить разность хода обыкновенного и необыкновенного лучей, прошедших через пластинку. Толщина пластинки равна 0,03 мм; $n_o=1,658$, $n_e=1,486$.

491. Две поляризационные призмы с воздушной прослойкой изготовлены из исландского шпата. В одной призме оптическая ось перпендикулярна, в другой — параллельна плоскости падения (рис. 56). Опишите действие каждой призмы. Как будет поляризован проходящий свет? Какая призма будет пропускать больше света? В каких пределах должен быть заключён угол α , чтобы из призмы выходил линей-

но-поляризованный свет. Для исландского шпата $n_o = 1,658$, $n_e = 1,486$. Свет падает на грань призмы перпендикулярно.

492. Определить максимальный угол α между направлением луча и направлением волновой нормали в исландском шпате, для которого $n_o = 1,658$, $n_e = 1,486$.



Рис. 56.

493. Какова должна быть наименьшая толщина d пластинки слюды, чтобы она могла служить в качестве пластиинки в $1/4$ волны для света натрия, если для этого света показатели преломления волн, идущих перпендикулярно к пластинке, соответственно равны $n_1 = 1,5941$, $n_2 = 1,5887$?

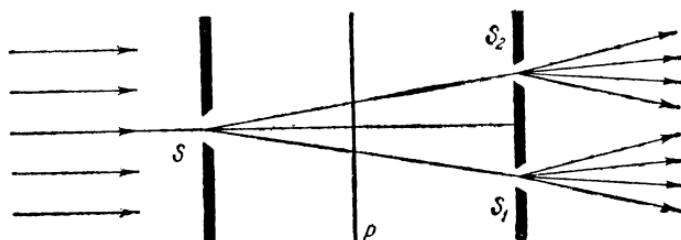


Рис. 57.

494. Найти наименьшую толщину d пластиинки кварца, вырезанной параллельно оптической оси, чтобы падающий плоско-поляризованный свет выходил поляризованным по кругу ($n_e = 1,5533$, $n_o = 1,5442$, $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см).

495. Главные диэлектрические проницаемости кристаллической пластиинки равны ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z . На грань пластиинки, параллельную координатной плоскости YZ , в направлении оси X падает линейно-поляризованныя световая волна. При какой толщине l пластиинки выходящая из нее волна будет иметь левую круговую поляризацию? Координатные оси X , Y , Z образуют правую систему.

496. В интерференционном опыте Юнга между щелью S и щелями S_1 и S_2 (рис. 57) введен поляроид P , главные оси которого параллельны или перпендикулярны к щелям S_1 и

S_2 . Как изменится интерференционная картина на экране, если щели S_1 и S_2 прикрыть пластинками в полволны, ориентированными взаимно перпендикулярно друг к другу (параллельно и перпендикулярно к щелям)? Что произойдет, если поляроид P повернуть на 90° ? Какая картина будет наблюдаться, если убрать поляроид? Рассмотреть ту же задачу, когда вместо пластиинки в полволны используется пластиинка в четверть волны. Щели S_1 и S_2 предполагаются узкими (порядка длины волны), а расстояние между ними большим по сравнению с их шириной.

497. Частично линейно-поляризованный свет рассматривается через николь. При повороте николя на 60° от положения, соответствующего максимальной яркости, яркость пучка уменьшается в два раза. Найти степень поляризации пучка $\Delta = \frac{I_s - I_p}{I_s + I_p}$ и отношение интенсивностей естественного и линейно-поляризованного света (I_s и I_p — максимальная и минимальная интенсивности света, проходящего через николь).

498. Некогерентная смесь линейно-поляризованного света и света, поляризованного по кругу, рассматривается через поляроид. Найдено положение поляроида, соответствующее максимальной интенсивности прошедшего света. При повороте поляроида из этого положения на угол $\alpha = 30^\circ$ интенсивность света уменьшилась на $p = 20\%$. Найти отношение интенсивности света I_k , поляризованного по кругу, к интенсивности линейно-поляризованного света I_n .

499. Некогерентная смесь линейно-поляризованного света и света, поляризованного по кругу, рассматривается через николь. Найдено положение николя, при котором интенсивность проходящего света максимальна. При повороте николя от этого положения на некоторый угол вокруг оси пучка интенсивность проходящего света уменьшается в $m = 2$ раза по сравнению с максимальной и во столько же раз увеличивается по сравнению с минимальной. Найти отношение интенсивности I_k света, поляризованного по кругу, к интенсивности света I_n , линейно-поляризованного.

500. Как изменится результат предыдущей задачи, если линейно-поляризованный свет и свет, поляризованный по кругу, будут когерентны?

501. Смесь света, поляризованного по кругу, и естественного рассматривается через кристаллическую пластиинку в четверть волны и николь. При вращении николя вокруг оси светового пучка найдено, что максимальная интенсив-

ность света, прошедшего через систему в $m=3$ раза, пре-
восходит минимальную интенсивность. Найти отношение
интенсивности света I_k , поляризованного по кругу, к ин-
тенсивности естественного света I_e .

502. Параллельный пучок монохроматического света с
длиной волны λ , поляризованный по правому кругу, падает
нормально на пластинку в полволны. Найти состояние по-
ляризации света, прошедшего через эту пластинку.

503. Параллельный пучок монохроматического света с
длиной волны λ падает нормально на поляроид, а затем на
пластинку в полволны. Главная плоскость поляроида (в ко-
торой лежит электрический вектор пропускаемой им волны) со-
ставляет угол α с осью этой пластинки. Найти состояние по-
ляризации прошедшего света на выходе из пластинки
в полволны.

504. Параллельный пучок монохроматического света проходит
через два николя, главные плоскости которых повернуты
друг относительно друга на угол $\alpha=20^\circ$. Между
николями ставится пластинка одноосного кристалла, вы-
резанная параллельно оптической оси и вносящая разность
хода $\lambda/2$ между обычным и необыкновенным лучами.
Какой угол β должна составлять оптическая ось пластинки
с главным направлением первого николя, чтобы свет через
эту систему не прошел?

505. Для сравнения яркостей двух поверхностей, осве-
щаемых неполяризованным светом, одну из них рассматри-
вают непосредственно, а другую через два николя. Каково
отношение этих яркостей, если освещенность обеих поверх-
ностей кажется одинаковой при угле между николями $\alpha =$
 $=60^\circ$? Считать, что потери света в каждом николе на от-
ражение и поглощение составляют $p=10\%$ от падающего
света.

506. Два николя N_1 и N_2 повернуты один относительно
другого на угол α ; между ними помещен николь N_3 (рис. 58).

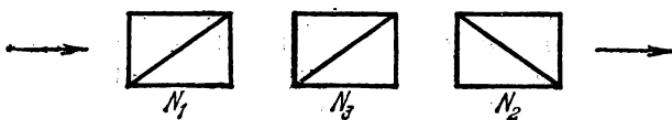


Рис. 58.

На систему падает параллельный пучок неполяризо-
ванного света. Предполагая, что необыкновенный луч про-
ходит через каждый николь без потерь, найти ориентацию

николя N_3 относительно николя N_1 , при которой интенсивность проходящего света максимальна. Определить интенсивность проходящего света в этих положениях, если интенсивность падающего света равна I_0 .

507. На пластинку кварца, вырезанную параллельно оптической оси, нормально падает белый свет, поляризованный по кругу. За пластинкой поставлен поляроид, главное направление которого составляет угол 45° с осью пластиинки. Прошедший свет попадает на щель спектрографа. Сколько темных полос k получится в спектре, если толщина кварцевой пластиинки $d=2$ мм, $n_e=1,55$, $n_o=1,54$. Падающий свет занимает интервал длин волн от $\lambda_1=4000\text{ \AA}$ до $\lambda_2=5000\text{ \AA}$, в котором $n_e-n_o=\text{const}$.

508. На кварцевую пластиинку толщиной 3 мм, вырезанную параллельно оптической оси, нормально падает пучок белого линейно-поляризованного света, плоскость поляризации которого составляет угол 45° с осью пластиинки. Выходящий из пластиинки свет сначала вновь проходит через николь, скрещенный с первичным поляризатором светового пучка, а затем падает на щель спектроскопа. Сколько темных полос будет наблюдаваться в спектре между длинами волн $\lambda_D=5890\text{ \AA}$ и $\lambda_F=4860\text{ \AA}$, если обычный (n_o) и необыкновенный (n_e) показатели преломления кварца для этих длин волн имеют следующие значения:

λ	n_o	n_e
λ_D	1,5442	1,5533
λ_F	1,5497	1,5589

509. Клин из двоякпреломляющего вещества помещен на пути монохроматического света, поляризованного по кругу (рис. 59). Оптическая ось клина параллельна ребру клина. Свет, прошедший через клин, рассматривается через поляроид, главное направление которого составляет угол 45° с ребром клина. Найти число темных полос m , наблюдаемых на поверхности клина. Максимальная толщина клина $d_{\max}=0,05$ см, $n_o=1,54$, $n_e=1,55$, $\lambda=5000\text{ \AA}$.

510. Найти интенсивность света, прошедшего через кристаллическую пластиинку, помещенную между двумя николями, главные плоскости которых образуют с одним из

главных направлений пластиинки углы α и β . Исследовать случаи скрещенных и параллельных николей.

511. Между двумя скрещенными николями помещена кристаллическая пластиинка толщиной $d=0,045$ мм с показателями преломления $n_e=1,55$, $n_o=1,54$. Пластиинка вырезана параллельно оптической оси кристалла и ориентирована так, что главное направление первого николя составляет угол $\alpha=30^\circ$ с ее оптической осью. На систему падает нормально естественный свет с длиной волны $\lambda=6000 \text{ \AA}$ и интенсивностью I_0 . Найти интенсивность света I , прошедшего через описанную систему.

512. Имеются два фотометра, устройство которых показано на рис. 60. Найти закон, связывающий отношение яркостей сравниваемых источников в обоих фотометрах с углами поворота окулярного николя. Во втором фотометре николи I и II скрещены, т. е. окулярный николь пропускает свет только от николя I , если он установлен параллельно ему, и не пропускает света от николя II .

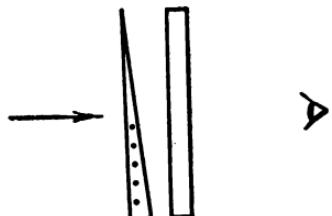


Рис. 59.

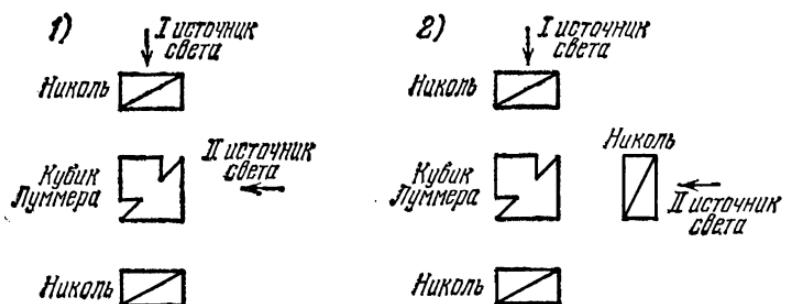


Рис. 60.

513. Почему тонкая двоякпреломляющая пластиинка, помещенная между двумя николями, имеет цветную окраску?

514. При каком положении анализатора относительно кристаллической пластиинки цветное окрашивание в условиях предыдущей задачи не наблюдается?

515. Почему никогда не может получиться интерференция обыкновенного и необыкновенного лучей, вышедших из пластиинки двоякпреломляющего кристалла, настолько тонкой, что она не дает заметного разделения лучей? (Ср. задачу 202.)

516. Почему демонстрационные опыты по интерференции поляризованных лучей удобнее делать с тонкими, а не с толстыми пластиинками? Почему даже с тонкими пластиинками из исландского шпата трудно получить интерференционную картину в белом свете?

517. Две толстые пластиинки одноосного кристалла, однаково ориентированные и весьма мало отличающиеся по толщине, дают порознь в скрещенных николях белый свет. Почему пластиинки, повернутые одна относительно другой на 90° , если их поместить между скрещенными николями, могут дать окрашивание?

518. Вторые темные полосы (т. е. две полосы, из которых одной соответствует вносимая компенсатором разность хода $+2\lambda$, а другой -2λ) для натрового света в компенсаторе Бабине (николи скрещены) располагаются на 7,34 и 27,20 делениях компенсатора. На каких делениях расположатся вторые темные полосы для света лития ($\lambda_{Li}=6708 \text{ \AA}$, $\lambda_{Na}=5893 \text{ \AA}$)?

519. Найти положение первых темных полос (т. е. двух ближайших темных полос, лежащих по обе стороны от центральной светлой полосы) для зеленої линии ртути в компенсаторе Бабине (николи параллельны), если первые темные полосы для натриевого света располагаются на делениях 14,73 и 19,68 ($\lambda_{Na}=5893 \text{ \AA}$, $\lambda_{Hg}=5461 \text{ \AA}$).

520. Как будет окрашена в скрещенных николях кристаллическая пластиинка, дающая разность хода 6500 \AA , если она освещается белым светом?

521. В каких случаях тонкая кристаллическая пластиинка, помещенная между скрещенными николями, кажется темной в монохроматическом свете?

522. Между скрещенными николями помещена пластиинка кварца, вырезанная параллельно оптической оси. Оптическая ось пластиинки составляет угол 45° с главными направлениями николей. Рассчитать минимальную толщину пластиинки, при которой одна линия водорода $\lambda_1=6563 \text{ \AA}$ будет сильно ослаблена, а другая $\lambda_2=4102 \text{ \AA}$ будет обладать максимальной интенсивностью. Величина двупреломления кварца $\Delta n=0,009$.

523. Между скрещенными николями помещена кристаллическая пластинка толщиной $d_1=0,02$ мм с величиной двупреломления $\Delta n_1=0,05$. На нее в параллельном положении положена другая пластинка толщиной $d_2=0,02$ мм с $\Delta n_2=0,025$. В какой цвет окрашено поле зрения? В какой цвет будет оно окрашено, если верхнюю пластинку и верхний николь повернуть на 90° от первоначального положения?

П р и м е ч а н и е. Параллельным положением называется такая ориентировка пластинок, при которой направление колебаний волны, распространяющейся с большей

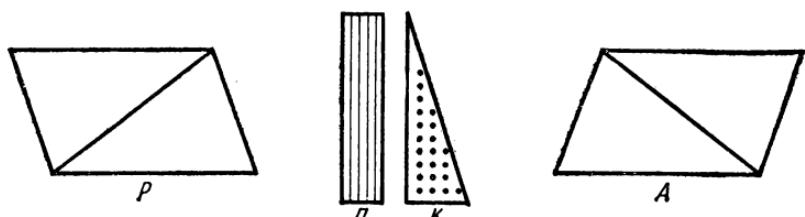


Рис. 61.

меньшей) скоростью в одной пластинке, совпадает с направлением колебаний волны, распространяющейся с большей (меньшей) скоростью во второй пластинке.

524. Пластинка L и клин K (рис. 61) вырезаны из различных положительных одноосных кристаллов и ориентированы так, что оптические оси их взаимно перпендикулярны. На каком расстоянии l от вершины клина будет наблюдаться в белом свете темная полоса при рассматривании этой системы между скрещенными николями P и A ? Толщина пластинки d , показатели преломления n_o и n_e , угол (малый) при вершине клина α , показатели преломления клина n'_o и n'_e . Пластинка с клином находится в диагональном положении по отношению к P и A .

525. В некоторых установках, предназначенных для анализа поляризованного света, пучок света пропускается через равномерно вращающийся николь, а затем падает на фотоэлемент. На какую частоту должен быть рассчитан усилитель фототока, если николь вращается с угловой скоростью ω ?

526. При интерференции сходящихся поляризованных лучей в кристаллической пластинке, вырезанной перпендикулярно к оптической оси и ориентированной так, что

оптическая ось совпадает с осью конуса сходящихся лучей, на поверхности пластиинки можно наблюдать характерный белый или черный крест. Что нужно сделать с элементами установки, чтобы повернуть весь крест в его плоскости на некоторый угол?

527. Слюдяная пластиинка в $\frac{1}{4}$ волны вращается между скрещенными николями. Под углом в 45° к главным сечениям николей в систему введен гипсовый компенсатор, дающий чувствительный оттенок. Описать получающиеся при этом характерные окраски. Первый чувствительный оттенок получается при разности хода в 5600 \AA . Разность хода, вносимая слюдяной пластиинкой, составляет около 1500 \AA .

Указание. Чувствительным оттенком называется фиолетовая окраска поля зрения, наблюдаемая в поляриметрах, когда в белом свете погашены наиболее яркие зеленовато-желтые лучи, к которым глаз наиболее чувствителен. Использование чувствительного оттенка позволяет добиться весьма точной установки поляризационного прибора, так как малейшее вращение анализатора или введение на пути луча оптически активного вещества резко меняет окраску.

528. Пластиинка черной слюды помещена после николя. Почему при повороте пластиинки относительно николя окраска ее изменяется даже при отсутствии второго николя?

529. Как отличить свет левополяризованный по кругу от правополяризованного?

530. Как отличить естественный свет от света, поляризованного по кругу, и от смеси естественного света с поляризованным по кругу?

531. Как отличить друг от друга: 1) эллиптически-поляризованный свет; 2) смесь естественного света с линейно-поляризованным светом (от части линейно-поляризованный свет); 3) смесь естественного света с эллиптически-поляризованным светом (от части эллиптически-поляризованный свет)?

532. Линейно-поляризованный луч проходит через кристаллическую пластиинку, одно из главных направлений которой составляет с главной плоскостью поляризатора угол i . Разность фаз, сообщаемая пластиинкой, равна δ . Найти: 1) отношение полуосей эллипса колебаний полученного эллиптически-поляризованного света; 2) угол между главными направлениями пластиинки и полуосями эллипса.

533. Как определить разность хода, вносимую кристаллической пластинкой, при помощи другой кристаллической пластины, для которой разность хода неизвестна?

534. На кристаллическую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси, падает нормально свет, поляризованный по кругу. Прошедший свет рассматривается через анализатор. 1) Определить интенсивность света, если главная плоскость анализатора составляет угол α с одним из главных направлений пластины. 2) Под каким углом надо поставить анализатор, чтобы получить максимальную и минимальную интенсивности?

535. Клин из двоякпреломляющего вещества помещен на пути монохроматического света, поляризованного по кругу. Оптическая ось параллельна ребру клина. Описать наблюдаемую через николь картину, когда клин неподвижен и когда он поворачивается вокруг направления распространения света.

536. Два когерентных пучка квазимохроматического неполяризованного света равной интенсивности дают на экране интерференционные полосы. Какой толщины кристаллическую пластинку надо ввести на пути одного из этих пучков, чтобы интерференционные полосы исчезли и притом так, чтобы их нельзя было восстановить никакой стеклянной пластинкой, вводимой в другой пучок? Как изменится картина, если за кристаллической пластинкой поставить поляроид? При каком положении поляроида интерференционных полос не будет?

537. Плоская световая волна эллиптически поляризована. Длины полуосей эллипса колебаний равны соответственно a и b . Какую кристаллическую пластинку надо поставить на пути распространения волны и как надо ориентировать эту пластинку, чтобы получить свет, поляризованный по кругу: 1) с тем же направлением вращения; 2) с противоположным направлением вращения?

538. Установка для выделения одной из линий узкого дублета и задержания другой изображена на рис. 62. Между параллельными николями B и C помещают пластинку исландского шпата A с осью, параллельной плоскостям пластины и наклоненной под углом 45° к плоскости поляризации света, проходящего через николь. При какой примерно толщине d пластины отфильтруется одна из линий дублета натрия, если дисперсия показателя преломления исланд-

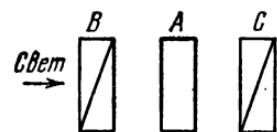


Рис. 62.

ского шпата вблизи дублета натрия представлена таблицей:

$\lambda, \text{ \AA}$	n_o	n_e
5876	1,65846	1,48647
5893	1,65836	1,48641

539. Под каким углом α к длинному ребру призмы Николя надо спилить ее основание, чтобы только необыкновенный луч прошел через призму и притом так, чтобы соответствующая ему волновая нормаль была параллельна длинному ребру призмы? В этом случае угол падения обыкновенного луча на слой канадского бальзама превышает предельный угол полного внутреннего отражения на $\delta = 1^{\circ}45'$. Показатель преломления необыкновенной волны для рассматриваемого направления $n_e = 1,516$, а обыкновенной $n_o = 1,658$. Показатель преломления канадского бальзама $n = 1,54$. Вычислить при данных условиях отношение длины призмы a к ее ширине b .

540. Поляризационная призма представляет собой прямоугольную призму, выпиленную из исландского шпата

так, что его оптическая ось параллельна плоскости распила (рис. 63, оптическая ось перпендикулярна к плоскости чертежа). Склейвающим веществом является либо канадский бальзам ($n = 1,54$), либо льняное масло ($n = 1,494$). Найти наивыгоднейшую апертуру призмы и соответствующее ей отношение длины a к ширине b для обоих склеивающих материалов.

541. Решить предыдущую задачу в предположении, что слой склеивающего вещества заменен прослойкой воздуха.

542. Выразить нормальную скорость v плоской монохроматической волны в однородной кристаллической среде через векторы D и E ¹⁾.

543. Показать, что направлением вектора D (или E) в кристалле однозначно определяется скорость v плоской

¹⁾ В задачах 542—559 оптическая одноосность кристалла не предполагается.

монохроматической волны, а также направление вектора E (или D). Показать также, что заданием направления вектора E (или D), вообще говоря, с точностью до знака определяются направления векторов H и N .

544. В системе диэлектрических осей связь между векторами D и E определяется соотношениями

$$D_\alpha = \epsilon_\alpha E_\alpha \quad (\alpha = x, y, z),$$

где ϵ_α — главные диэлектрические проницаемости кристалла. Определить нормальные скорости распространения волн в кристалле, когда вектор D (а следовательно, и вектор E) направлен вдоль одной из диэлектрических осей кристалла.

Указание. См. задачу 542.

545. Выразить нормальную скорость плоской монохроматической волны в однородном кристалле в зависимости от направления волновой нормали N .

546. Показать, что в каждом направлении N в кристалле могут распространяться две волны, вообще говоря, с различными нормальными скоростями. Если эти скорости различны, то каждая из волн линейно-поляризована, причем векторы D обеих волн взаимно перпендикулярны.

547. Прямая, вдоль которой нормальные скорости обеих линейно-поляризованных волн, могущих распространяться в кристалле, одинаковы, называется оптической осью второго рода или бинормалью. Показать, что в кристалле существуют, вообще говоря, две оптические оси второго рода и найти их направления.

548. Пользуясь общими формулами кристаллооптики для двусосных кристаллов, исследовать случаи, когда оптические оси кристалла совпадают между собой, т. е. кристалл вырождается в оптически одноосный. Найти в этом случае выражения для нормальных скоростей световой волны. Показать, что в обыкновенной волне, т. е. волне, скорость которой не зависит от направления волновой нормали, векторы D и E перпендикулярны к оптической оси кристалла.

549. Лучом в кристалле называется линия, направленная вдоль вектора потока энергии $S = \frac{c}{4\pi} [EH]$. Вдоль лучей распространяется энергия волны (см. задачу 591). Скорость волнового фронта вдоль направления луча называется лучевой скоростью. Показать, что лучевая скорость u связана с нормальной скоростью волны v соотношением $u=v(Ns)$, где s — единичный вектор вдоль луча.

550. Показать, что любая формула, связывающая величины D, E, H, N, v в плоской волне, распространяющейся в однородном кристалле, остается справедливой, если величины, стоящие в верхней строке ряда:

$$D, E, H, N, v, s, c, \varepsilon_\alpha, a_\alpha,$$

$$E, D, H, s, \frac{1}{u}, N, \frac{1}{c}, \frac{1}{\varepsilon_\alpha}, \frac{1}{a_\alpha},$$

заменить стоящими под ними величинами в нижней строке того же ряда. То же самое относится к формулам, связывающим D, E, H, s, u . (Теорема обращения или взаимности.)

551. Показать, что в каждом направлении кристалла могут распространяться два луча. Если лучевые скорости этих лучей различны, то оба луча линейно-поляризованы, причем векторы E в них взаимно перпендикулярны.

552. Прямая, в направлении которой лучевые скорости обоих линейно-поляризованных лучей, могущих распространяться в кристалле, одинаковы, называется оптической осью первого рода или бирадиалю. Показать, что в кристалле существуют, вообще говоря, две оптические оси первого рода и найти их направления.

553. Определить оптический знак двуосного кристалла по трем главным показателям преломления.

П р и м е ч а н и е. Двуосный кристалл считается положительным, если угол между оптической осью первого рода и диэлектрической осью наибольшей диэлектрической проницаемости ε_z меньше 45° ; если этот угол больше 45° , то кристалл называется отрицательным.

554. Определить оптический знак двуосного кристалла, если $n_z - n_x = 0,036$ и $n_z - n_y = 0,019$.

555. Показать, что если кристалл имеет две оптические оси первого рода, то он имеет также две оптические оси второго рода, и наоборот.

556. Найти выражение для лучевой скорости в зависимости от направления луча в оптически одноосном кристалле.

557. Волновая или лучевая поверхность строится следующим образом. Из какой-либо точки O проводятся прямые во всевозможных направлениях и на них откладываются отрезки, длины которых пропорциональны лучевым скоростям в этих направлениях. Показать, что лучевая поверхность одноосного кристалла распадается на совокупность двух поверхностей: сферу (обыкновенная волна) и эллипсоид вращения (необыкновенная волна).

558. Показать, что все кристаллы три-, тетра- и гексагональной систем одноосны.

Указание. Рассмотреть элементы симметрии этих кристаллов. Использовать симметричность тензора диэлектрической проницаемости.

559. Показать, что кристаллы кубической системы оптически изотропны.

Указание. См. предыдущую задачу.

560. Законы распространения света в оптически одноосных кристаллах впервые были сформулированы Гюйгенсом на основе принципа, носящего его имя («принципа Гюйгенса»). Гюйгенс предположил, что в таком кристалле волновая (лучевая) поверхность распадается на две поверхности: сферу (обыкновенная волна) и эллипсоид вращения (необыкновенная волна). Огибающая элементарных волн Гюйгенса такого типа, вышедших из точек волнового фронта, определяет положение нового волнового фронта. Прямая, соединяющая центр элементарной волны с точкой касания к ней волнового фронта, дает направление светового луча.

Выполнить построение Гюйгенса и найти направления преломленных волновых фронтов и лучей в одноосном кристалле (положительном и отрицательном) для следующих случаев: 1) оптическая ось перпендикулярна к плоскости падения и параллельна поверхности кристалла; 2) оптическая ось лежит в плоскости падения параллельно поверхности кристалла; 3) оптическая ось лежит в плоскости падения под углом 45° к поверхности кристалла.

561. Для пластинки топаза графическое изображение изменений значений показателей преломления, полученных на кристалл-рефрактометре, имеет вид окружности радиуса $n_z=1,6193$ и находящегося в ней эллипса с полуосями $n_x=1,6100$ и $n_y=1,6127$. Определить оптический знак топаза и ориентировку пластиинки относительно диэлектрических осей кристалла.

562. Как надо ориентировать пластиинку из двуосного кристалла, чтобы получить на кристалл-рефрактометре три главных показателя преломления?

563. Пластиинка кварца толщиной в 1 мм вырезана перпендикулярно к оптической оси и помещена между скрещенными николями. Почему при любой длине волны падающего света она будет оставаться освещенной?

564. Как отличить пластиинку кварца, вырезанную перпендикулярно к оси, от пластиинки кварца, вырезанной

параллельно оси, имея в своем распоряжении два николя и источник белого света?

565. Почему при вращении анализатора пластинка кварца, вырезанная перпендикулярно к оптической оси и помещенная между николями, меняет свою окраску?

566. Почему в условиях предыдущей задачи при вращении анализатора в одном и том же направлении одни пластинки кварца дают смену цветов в определенной последовательности, а другие — в обратной?

567. Кварцевая пластинка толщиной в 1 мм вырезана перпендикулярно к оптической оси. Как определить, из право- или левовращающего кварца сделана пластинка, имея в своем распоряжении два николя и источник: 1) монохроматического света; 2) белого света?

568. Пластинка кварца толщиной в 1 мм, вырезанная перпендикулярно к оптической оси, помещена между параллельными николями. Для некоторой длины волны вращение плоскости поляризации равно 20° . При какой толщине кварца d свет данной длины волны будет полностью погашен?

569. Какой толщины надо взять кварц, чтобы получить чувствительный оттенок: 1) в скрещенных и 2) в параллельных николях, если вращательная способность кварца для желто-зеленых лучей составляет $24 \text{ угл.град}/\text{мм}$.

П р и м е ч а н и е. См. примечание к задаче 527.

570. Дисперсия вращения кварца, вырезанного перпендикулярно к оптической оси, для желтой области спектра характеризуется следующими значениями вращательной способности α :

$\lambda, \text{\AA}$	$\alpha, \text{угл.град}/\text{мм}$
5269	27,543
5895	21,684

Зависимость вращательной способности от длины волны в узкой спектральной области может быть выражена формулой

$$\alpha = A + \frac{B}{\lambda^2},$$

где A и B — постоянные. Определить наименьшую толщину кварцевой пластинки d , помещенной между двумя скрещенными николями, чтобы из двух линий натрия $\lambda_1=5889,953\text{ \AA}$ и $\lambda_2=5895,923\text{ \AA}$ одна полностью гасилась, а другая пропускалась наполовину.

571. Какую минимальную разность показателей преломления Δn право- и левополяризованных по кругу лучей ($\lambda=5893\text{ \AA}$) можно обнаружить при слое вещества $l=30\text{ см}$, если измерять угол поворота плоскости поляризации с точностью до 1° ?

572. Чему равна разность показателей преломления Δn для право- и левополяризованного по кругу света длины волны $\lambda=5893\text{ \AA}$ в кварце, если известно, что вращение плоскости поляризации в кварце для этой длины волны равно $21,7^\circ$ на 1 мм ?

573. Поляризационный прибор состоит из двух пар кварцевых клиньев, вырезанных перпендикулярно к оптической оси. Одна пара клиньев изготовлена из правого, другая из левого кварца. Одноименные клинья сложены так, что образуют прямоугольный параллелепипед. Обе пары разноименных клиньев склеены своими треугольными гранями. Одна часть прибора может перемещаться относительно другой при помощи винта (подобно компенсатору Бабине); таким образом, прибор представляет собой бикварц переменной толщины. Как при помощи этого прибора можно точно определить главные направления исследуемой пластиинки и их дисперсию?

574. Найти условия излучения Вавилова — Черенкова и качественно описать это явление при движении частицы в кристаллах. (См. задачу 261.)

575. Показать, что при движении частицы вдоль оптической оси одноосного кристалла излучение Вавилова — Черенкова может состоять только из конуса необыкновенных волн.

§ 8. Скорость света

576. В чем ошибочность следующего рассуждения: «Аберрация света зависит от движения звезды относительно Земли. Угол aberrации ϑ определяется соотношением $\operatorname{tg} \vartheta=v/c$, где v — поперечная скорость звезды относительно Земли. Поскольку скорости различных звезд весьма сильно отличаются друг от друга, наблюдаемые углы aberrации (в противоречии с опытом) должны были бы также

сильно отличаться друг от друга даже для близко расположенных звезд на небесной сфере?

577. 1) Какова величина аберрации, вызываемой вращением Земли вокруг своей оси (на экваторе)? 2) Во сколько раз она меньше аберрации, связанной с годичным движением Земли?

578. Найти выражение для скорости света c в опыте Физо в случае, если имеет место n -е затемнение. Расстояние

между колесом и зеркалом равно D , число оборотов в 1 секунду N , число зубцов Z . Определить c , если $D=10$ км, $Z=720$. Угловые скорости при четырех последовательных исчезновениях света составляли 326, 457, 588 и 719 рад/с.

579. Рассматривая импульс, представляющий собой суперпозицию двух

гармонических волн $\cos(\omega t - kx)$ и $\cos(\omega' t - k' x)$, найти групповую скорость u .

580. Выразить групповую скорость $u=d\omega/dk$ через фазовую скорость света v и $dv/d\lambda$, а также через v и $dn/d\lambda$.

581. Изобразим кривой зависимость фазовой скорости волны v от длины волны λ (рис. 64). Показать, что отрезок OA на оси v , отсекаемый касательной к этой кривой в точке λ_0 , равен групповой скорости для длины волны $\lambda=\lambda_0$. (Построение П. С. Эренфеста.)

582. Плоское волновое возмущение распространяется в среде с линейным законом дисперсии: $v=a+b\lambda$, где v — фазовая скорость, а a и b — постоянные. Показать, что каково бы ни было возмущение, форма его, непрерывно изменяясь, будет периодически восстанавливаться по истечении времени $\tau=d\lambda/dv=1/b$. Показать, что отношение пути s , пройденного возмущением за промежуток времени τ к продолжительности этого промежутка, равно групповой скорости.

Указание. Любое плоское возмущение в любой момент времени может быть получено суперпозицией синусоид. Каждая из синусоид перемещается со своей фазовой скоростью в одном и том же направлении. Вследствие этого непрерывно деформируется форма возмущения. Утвержде-

ние, сформулированное в задаче, будет доказано, если показать, что существует такое время τ , по истечении которого точно восстанавливается первоначальное взаимное расположение синусоид. Достаточно провести рассуждение для трех синусоид; обобщение на большее число синусоид trivialно.

583. Вычислить групповую скорость u для различных законов дисперсии (v — фазовая скорость):

1) $v=a$ ($a=\text{const}$) — недиспергирующая среда, например звуковые волны в воздухе;

2) $v=a\sqrt{\lambda}$ — волны на поверхности воды, вызываемые силой тяжести;

3) $v=a/\sqrt{\lambda}$ — капиллярные волны;

4) $v=a/\lambda$ — поперечные колебания стержня;

5) $v=\sqrt{c^2+b^2\lambda^2}$ — электромагнитные волны в ионосфере (c — скорость света в вакууме, λ — длина волны в среде, см. задачу 682);

6) $v=c\omega/\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu-c^2\alpha^2}$ — электромагнитные волны в прямолинейном волноводе, заполненном диспергирующей средой с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=\varepsilon(\omega)$ и магнитной проницаемостью $\mu=\mu(\omega)$ (c — скорость света в вакууме, α — постоянная, зависящая от размеров и формы поперечного сечения волновода).

584. При каком законе дисперсии немагнитной среды $\varepsilon=\varepsilon(\omega)$, заполняющей прямолинейный волновод или бесконечное пространство, связь между фазовой и групповой скоростями электромагнитных волн принимает вид $vu=c^2$?

Указание. См. предыдущую задачу.

585. Показать, что в условиях предыдущей задачи, а также в том случае, когда внутри волновода вакуум, фазовая скорость электромагнитных волн в волноводе превосходит скорость света в вакууме.

586. Найти групповую скорость u рентгеновского излучения в среде, если предельный угол полного внутреннего отражения при падении этих волн на среду из воздуха равен α . Показатель преломления рентгеновских волн определяется выражением $n^2=1-\omega_0^2/\omega^2$, где ω_0 — постоянная.

587. Для определения плотности электромагнитной энергии в непоглощающей диспергирующей среде можно поступить следующим образом. Пусть вещество с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$ и магнитной проницаемостью $\mu(\omega)$ заполняет плоский конденсатор с емкостью $C=\varepsilon(\omega)C_0$

и тонкий соленоид с индуктивностью $L = \mu(\omega)L_0$, соединенные в колебательный контур (рис. 65). C_0 и L_0 — значения емкости и индуктивности для того случая, когда в пространстве между обкладками конденсатора и внутри соленоида вакуум. При отсутствии сопротивления в контуре будут совершаться свободные гармонические колебания с циклической частотой $\omega = 1/\sqrt{L(\omega)C(\omega)}$. Если в некоторый момент времени ввести в контур малое сопротивление R , то, начиная с этого момента, колебания сделаются затухающими и первоначально запасенная электромагнитная энергия будет переходить в джоулево тепло, выделяющееся в сопротивлении R . Полное количество тепла, выделившееся в сопротивлении R за время, когда колебания прекратятся, будет равно электромагнитной энергии, запасенной в контуре до введения сопротивления. Найти выражение для плотности электромагнитной энергии в непоглощающей диспергирующей среде.

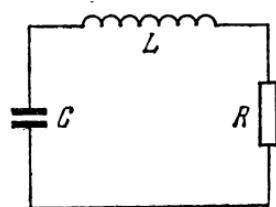


Рис. 65.

Если в некоторый момент времени ввести в контур малое сопротивление R , то, начиная с этого момента, колебания сделаются затухающими и первоначально запасенная электромагнитная энергия будет переходить в джоулево тепло, выделяющееся в сопротивлении R . Полное количество тепла, выделившееся в сопротивлении R за время, когда колебания прекратятся, будет равно электромагнитной энергии, запасенной в контуре до введения сопротивления. Найти выражение для плотности электромагнитной энергии в непоглощающей диспергирующей среде.

П р и м е ч а н и е. О физическом смысле полученного выражения см. задачу 684.

588. Среднюю скорость движения энергии u в плоской монохроматической бегущей волне можно определить как отношение средней плотности потока энергии к средней плотности самой энергии. В электромагнитной волне плотность потока энергии дается вектором $S = \frac{c}{4\pi} [EH]$. Пользуясь этим и результатом решения предыдущей задачи, показать, что средняя скорость движения электромагнитной энергии в плоской монохроматической бегущей волне совпадает с групповой скоростью.

589. Какая скорость света измеряется методом Рёмера и Физо, фазовая или групповая?

590. Показать, что если $\epsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ положительны, то фазовая и групповая скорости в электромагнитной волне направлены в одну сторону.

591. В анизотропной среде фазовая скорость волны зависит не только от частоты ω , но и от направления распространения волны. Если записать закон дисперсии в форме $\omega = \omega(k)$, то легко показать, что групповая скорость в такой среде будет вектором с компонентами $\partial\omega/\partial k_i$ ($i = x, y, z$). Показать, что в прозрачном однородном кристалле групп-

повая скорость по величине и направлению совпадает с лучевой скоростью u . Для простоты пренебречь зависимостью тензора диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\alpha\beta}$ от частоты ω .

592. Из общих соображений вытекают так называемые дисперсионные соотношения, т. е. соотношения, устанавливающие связь между вещественной и мнимой частями диэлектрической проницаемости¹⁾. Следствием этих соотношений для прозрачной изотропной среды являются неравенства $d\epsilon/d\omega \geq 0$, $d\epsilon/d\omega \geq 2(1-\epsilon)/\omega$, где $\epsilon(\omega)$ — диэлектрическая проницаемость на частоте ω . Пользуясь этими неравенствами, доказать, что групповая скорость $v_g \leq c$.

593. Луч прожектора, вращающийся с угловой скоростью ω , скользит по цилиндрическому экрану. Можно ли применять для вычисления скорости «зайчика» формулу $v = \omega r$ (r — расстояние от прожектора до экрана), если $v > c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с? Нет ли здесь противоречия с теорией относительности?

594. Наблюдатель (или регистрирующая аппаратура) находится на значительном расстоянии от плоского экрана, который в некоторый момент t_0 весь освещается (загорается). Какую картину увидит наблюдатель?

595. Светящаяся сферическая оболочка (например, оболочка взорвавшейся звезды) начала расширяться в точке O со скоростью v в момент t_1 . Найти место точек («видимую» оболочку), излучение от которой достигает наблюдателя в точке P в момент $t \geq t_0 = t_1 + R/c$, где R — расстояние OP , которое считается достаточно большим.

596. Найти скорость u расширения «видимой» оболочки, рассмотренной в предыдущей задаче. Каковы максимальные значения этой скорости, а также скорости оболочки, перпендикулярной к лучу зрения?

597. Как ясно из решения предыдущей задачи «видимая» скорость $u_{\perp \max}$ может быть сколь угодно велика и, в частности, может превосходить скорость света c . Почему это не противоречит теории относительности?

598. Источник света (излучающий осциллятор и т. п.) движется по прямой линии в некоторой среде со скоростью v , превосходящей фазовую скорость света в среде $v_\phi = c/n$ (для простоты считать, что дисперсия отсутствует и таким образом групповая скорость света также равна c/n). В не-

¹⁾ Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.

который момент источник останавливается. Какое движение источника увидит наблюдатель, расположенный перед источником на продолжении его траектории?

599. Вывести формулу для эффекта Доплера в акустике при произвольном движении источника и наблюдателя относительно воздуха.

600. Получить выражение для эффекта Доплера в акустике, когда источник и наблюдатель движутся вдоль прямой, их соединяющей.

601. До теории относительности эффект Доплера в оптике трактовался так же, как в акустике. Считалось, что свет распространяется в эфире подобно акустическим волнам в воздухе. В нерелятивистском приближении, когда можно было пренебречь величинами порядка $(v_{\text{отн}}/c)^2$, где $v_{\text{отн}}$ — скорость источника относительно наблюдателя, такая трактовка приводила к правильному результату. Вывести формулу для изменения частоты в эффекте Доплера в указанном приближении.

602. Монохроматическая волна частоты v падает нормально на зеркало, равномерно движущееся в направлении нормали. Как связана в нерелятивистском приближении частота v' отраженной волны со скоростью движения зеркала v ?

603. Для экспериментальной проверки принципа Доплера в земных условиях А.А. Белопольский использовал отражение света от зеркал, приводимых в быстрое вращение. Световой луч, прежде чем он попадал в глаз наблюдателя, успевал несколько раз отразиться от движущихся зеркал. Считая, что свет падает на движущиеся зеркала нормально, найти измененную частоту v' , если скорость движения зеркал v , а число отражений N (считать, что $v \ll c$, и пренебречь членами порядка v^2/c^2).

604. Какая скорость света измеряется в методе вращающегося зеркала Фуко, фазовая или групповая?

Указание. Согласно принципу Доплера при отражении света от движущегося зеркала изменяется длина световой волны. Так как скорости различных точек вращающегося зеркала неодинаковы, то это изменение будет разным для лучей, отразившихся от различных точек зеркала. Поэтому если среда, в которой распространяется отраженный свет, диспергирующая, то фазовые скорости для этих лучей будут также разными. Это ведет к повороту волнового фронта отраженной волны. В методе Фуко этот поворот надо учитывать.

605. Майкельсон измерил скорость света в сероуглероде по методу вращающегося зеркала. Показатель преломления сероуглерода для средней длины волны видимого спектра равен $n=1,64$, а величина $1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}$ равна 0,93. Определить, какое следует ожидать значение для отношения скорости света в вакууме к измеренной этим методом скорости света в сероуглероде?

606. В додерятивистской классической теории эффекта Доплера вводилось движение источника света и наблюдателя относительно эфира. Допустим, что источник света движется относительно эфира, а наблюдатель покоятся. Тогда длина волны излучаемого света изменяется, и неподвижный наблюдатель может обнаружить это с помощью дифракционной решетки. Но если источник света неподвижен относительно эфира, то движение решетки, очевидно, никак не может оказаться на длине волны излучаемого света. Тем не менее и в этом случае дифракционная решетка обнаруживает смещение спектральных линий согласно эффекту Доплера. Разобрать механизм и рассчитать величину этого смещения.

607. Каково доплеровское смещение $\Delta\lambda$ линии водорода H_β ($\lambda=4861 \text{ \AA}$) при наблюдении вдоль пучка водородных каналовых лучей, имеющих среднюю скорость $v=1,3 \times 10^8 \text{ см/с}$?

608. Каково доплеровское смещение $\delta\lambda$ в условиях предыдущей задачи, если наблюдать в направлении, перпендикулярном к направлению пучка?

609. Каково максимальное доплеровское смещение $\Delta\lambda$ для линии водорода H_β , излучаемой движущимися атомами водорода с кинетической энергией $4 \cdot 10^6 \text{ эВ}$?

610. Каково поперечное доплеровское смещение $\delta\lambda$ в условиях предыдущей задачи?

611. Как движется относительно Земли некоторая туманность, если известно, что линия водорода H_γ ($\lambda=4340 \text{ \AA}$) в спектре туманности смещена на 20 \AA в красную сторону?

612. Каково максимальное полугодичное изменение $\Delta\lambda$ зеленых линий ($\lambda=5500 \text{ \AA}$) спектра звезд, лежащих в плоскости земной орбиты?

613. Длина волны некоторой фраунгоферовой линии в солнечном спектре равна 5900 \AA при наблюдении по направлению к полюсу Солнца. При наблюдении той же линии по направлению на край солнечного диска на экваторе

обнаруживается смещение на $0,04 \text{ \AA}$. Найти линейную скорость v солнечного экватора.

614. Ограничиваюсь только непосредственными наблюдениями колец планеты Сатурн в телескоп, не удается решить, являются ли эти кольца сплошными образованиями или только скоплениями большого числа мелких спутников в определенных плоскостях. Как, пользуясь законами механики и оптическим эффектом Доплера, можно однозначно решить вопрос в пользу того или иного предположения?

615. Найти приближенное значение катодного падения потенциала V в разрядной трубке, если доплеровское смещение линии $\lambda = 5016 \text{ \AA}$, принадлежащей гелию и наблюдающей под углом 145° к каналовому лучу, составляет 5 \AA .

616. Приемник радиолокатора определяет скорость приближения самолета по частоте биений между непосредственно принимаемым от передатчика сигналом и сигналом, полученным вследствие отражения от движущегося самолета. На какой длине волны λ должен работать радиолокатор, чтобы приближающийся со скоростью $v = 1800 \text{ км/ч}$ самолет давал частоту биений $\Delta v = 2000 \text{ Гц}$?

§ 9. Теория относительности и оптика движущихся тел

617. Можно ли с помощью фотоаппарата зафиксировать сокращение Лорентца по изменению формы предмета, пролетающего мимо точки фотографирования с релятивистской скоростью? Рассмотреть случай куба и шара, летящих на большом расстоянии от точки фотографирования.

618. Согласно теории относительности «стандартные» движущиеся часы идут медленнее покоящихся, мимо которых они пролетают. При этом ход часов, как обычно считают, зависит явным образом только от их скорости, но не от ускорения. Является ли последнее утверждение следствием теории относительности (лорентцевых преобразований) или основано на опыте?

619. Можно ли считать релятивистское сокращение масштабов и замедление хода часов результатом динамических процессов, происходящих в масштабах и часах?

620. Два шарика диаметром d_0 (в системе покоя) приведены в движение навстречу друг другу с релятивистской скоростью v . После лобового столкновения в определенных условиях можно считать, что шарики мгновенно останавливаются, а затем происходит их разлет. Каков

размер системы l в момент остановки? (Такими шариками в некотором приближении можно считать, например, протоны, в результате соударения которых образуются новые частицы — пионы и пр.)

621. На слой плазмы с электронной концентрацией n (в котором вначале тока нет) действует импульс электрического поля, направленного вдоль слоя и ускоряющего частицы до релятивистских скоростей. Какова будет концентрация частиц в плазме после ускорения. Нужно ли учитывать лорентцево сокращение единицы объема плазмы?

622. Какова максимальная плотность тока, который может течь в полностью ионизованной водородной плазме с электронной концентрацией n (при неизменном значении ее)?

623. Как преобразуется плотность вещества при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой?

624. Определить время жизни τ μ -мезона с энергией $E=10^9$ эВ (в лабораторной системе отсчета). Время жизни медленного (покоящегося) μ -мезона $\tau_0=2,2 \cdot 10^{-6}$ с, масса μ -мезона $m=206,7 m_e$ (m_e — масса электрона).

625. Оптический эффект Доплера отличается от акустического в двух отношениях. I. В акустике есть среда (воздух), относительно которой могут двигаться источник и наблюдатель. В оптике, когда речь идет о распространении света в вакууме, подобной среды не существует — имеет смысл говорить только об относительном движении источника и наблюдателя. II. При больших скоростях источников света в оптике надо считаться с эффектом теории относительности «замедления хода движущихся часов». Учитывая эти два отличия, получить формулу для оптического эффекта Доплера. За систему отсчета принять ту, относительно которой наблюдатель неподвижен. Рассмотреть частные случаи: 1) источник движется вдоль луча зрения, в направлении которого его видит наблюдатель; 2) источник движется перпендикулярно к этому лучу.

626. Получить формулу для релятивистского эффекта Доплера, принимая за систему отсчета систему, в которой покится источник.

627. Пользуясь результатами решения задач 625 и 626, получить релятивистскую формулу для aberrации света.

628. Получить релятивистскую формулу для эффекта Доплера, когда источник движется в среде со скоростью v , а наблюдатель в этой среде покоятся.

629. Расчет релятивистского эффекта Доплера и aberrации света проще всего произвести, пользуясь инвариант-

ностью фазы волны относительно преобразования Лорентца. Согласно этой инвариантности в плоской волне справедливо соотношение

$$\omega t - \mathbf{k}r = \omega't' - \mathbf{k}'r',$$

где t , \mathbf{r} и t' , \mathbf{r}' — время и координаты одного и того же события в «неподвижной» и «движущейся» системах отсчета, связанные между собой преобразованием Лорентца. Доказать это соотношение и, пользуясь им, получить релятивистские формулы для эффекта Доплера и aberrации света.

630. Главная трудность наблюдения поперечного эффекта Доплера в каналовых лучах заключается в следующем. Поперечный эффект, как эффект второго порядка относительно v/c , очень мал по сравнению с эффектом первого порядка (см. задачи 607 и 608). Чтобы исключить эффект первого порядка, надо создать в высокой степени параллельный пучок каналовых частиц, движущихся перпендикулярно к линии наблюдения. Малейшее отклонение в направлении движения этих частиц от строгой перпендикулярности к линии наблюдения поведет к появлению продольной компоненты скорости и к продольному эффекту Доплера, который может перекрыть эффект второго порядка. В условиях задачи 607 подсчитать максимальный угол отклонения пучка от строгой перпендикулярности к линии наблюдения, при которой поперечный эффект еще не будет маскироваться продольным эффектом.

631. С учетом дисперсии найти в первом приближении скорость света v_ϕ в жидкости, движущейся от источника со скоростью v , если в неподвижной жидкости скорость света равна $c/n(\lambda)$, где λ — длина волны света в неподвижной жидкости.

632. Две одинаковые частицы (например, два протона), ускоренные до одной и той же энергии $\mathcal{E}=10$ ГэВ, движутся навстречу друг другу и сталкиваются между собой. Рассмотреть тот же процесс в лабораторной системе отсчета, в которой одна из частиц (мишень) покоятся, а другая движется навстречу ей. Определить энергию \mathcal{E}' второй частицы в этой системе. (Принцип ускорителя на встречных пучках.)

633. Межзвездный корабль движется к ближайшей звезде, находящейся на расстоянии $L=4,3$ световых года, со скоростью $v=1000$ км/ч. Достигнув звезды, корабль возвращается обратно. На какое время Δt часы на корабле станут от земных часов по возвращении корабля на Землю?

П р и м е ч а н и е. Ввиду большой скорости корабля движение звезды относительно Солнца можно не учитывать.

634. Какая кинетическая энергия \mathcal{E} должна быть сообщена межзвездному кораблю массы $m=10^4$ кг, чтобы его часы по возвращении на Землю показывали вдвое меньшее время, чем часы на Земле? Сколько тонн урана M должно прореагировать, чтобы выделилось такое количество энергии? При делении одного атома урана выделяется энергия 170 МэВ. Какую скорость v будет иметь корабль при такой кинетической энергии?

635. Как связана начальная (стартовая) масса m_0 релятивистской ракеты с ее конечной массой m и достигнутой скоростью v в произвольный момент времени? Считать, что скорости ракеты v и газовой струи u (относительно ракеты) направлены вдоль одной прямой, причем ракета все время движется с включенным двигателем, так что величина u остается постоянной.

636. Во что переходит формула (635.4) для нерелятивистских движений?

637. Ввиду колоссальности расстояний до звезд для достижения даже ближайших звезд требуются космические корабли,двигающиеся со скоростью порядка скорости света c . Допустим, что фантастический космический корабль представляет собой ракету, работающую на химическом топливе, которое позволяет получать газы, выбрасываемые из ракеты с относительной скоростью $u=10$ км/с. Ракета должна достигнуть скорости $v=c/3$. Оценить, какое количество топлива m_0 потребуется в этом случае на каждую тонну полезного груза ракеты.

638. Найти скорость и минимальное отношение массы в начале пути к массе в конце пути фотонной ракеты (двигатель которой превращает «горючее вещество», находящееся на ракете, в направленный пучок света), необходимые для достижения ракетой туманности Андромеды (удаленной на $R=1,8 \cdot 10^6$ световых лет) за 25 лет по собственному времени ракеты. Временем ускорения и замедления ракеты пренебречь.

639. Какое собственное время пройдет на космическом корабле при полете от Земли до Галактического центра, удаленного на расстояние $R=3 \cdot 10^4$ световых лет, если первую половину пути космический корабль движется по прямой с ускорением $a=10$ м/с², постоянным в системе координат, связанной в каждый момент с космическим кораблем

(так называемое «гиперболическое» движение), а вторую половину пути корабль замедляется с тем же ускорением? (Собственное время здесь определяется как

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \beta^2(t)} dt,$$

где dt — время в системе Земли, а $\beta = v/c$.)

640. Какую минимальную мощность в начале пути должен иметь двигатель фотонной ракеты для полета к центру Галактики ($R = 3 \cdot 10^4$ световых лет), если первую половину пути ракета движется с постоянным ускорением $a = 10 \text{ м/с}^2$ (в собственной системе), а вторую половину пути она замедляется с тем же ускорением при условии, что все топливо находится на ракете, а масса ракеты M_k в конце пути равна 10^3 т ?

641. Чему равна интенсивность корпускулярного космического излучения на космическом корабле, обусловленного наличием в межзвездной среде атомов водорода с плотностью $n = 1 \text{ см}^{-3}$? Условия движения корабля те же, что и в предыдущей задаче.

642. Как изменится расположение звезд на небесной сфере для наблюдателя на космическом корабле, движущемся с релятивистской скоростью v относительно Земли?

643. Радиолокатор работает на частоте ω («несущая» частота сигнала) и облучает предмет, движущийся со скоростью v в произвольном направлении относительно радиолокатора. Учитывая эффект Доплера, найти «несущую» частоту отраженного от предмета излучения ω_* , принимаемого тем же радиолокатором.

644. В циклическом сильноточном электронном ускорителе — микротроне — электрон, проходя ускоряющий промежуток, приобретает энергию, кратную его энергии покоя $\Delta E = nmc^2$, где n — целое число. Затем его поворачивает постоянное однородное магнитное поле H_0 и он снова попадает в ускоряющий промежуток (обычно в тот же). Пренебрегая размерами ускоряющего промежутка по сравнению с размерами орбиты электрона, найти максимальное расстояние между орбитами и энергию электрона на выходе микротрона, если число ускорений $N = 12$ при $n = 2$, $H_0 = 1000 \text{ Э}$.

645. Согласно принципу эквивалентности Эйнштейна все процессы в однородном поле тяготения протекают так

же, как в системе отсчета, движущейся с постоянным ускорением относительно инерциальной системы отсчета. Пользуясь этим принципом, показать, что частота света при его распространении в поле тяготения должна изменяться (гравитационное смещение спектральных линий). Связать изменение частоты с изменением гравитационного потенциала вдоль светового луча.

646. Какое число штрихов должна иметь дифракционная решетка, чтобы с ее помощью в спектре испускания Солнца можно было обнаружить гравитационное смещение спектральных линий, если наблюдение ведется во втором порядке ($m=2$). Необходимые числовые данные можно получить, зная угловой радиус Солнца (при наблюдении с Земли) $\alpha=0,00465$ рад и скорость движения Земли по ее орбите $v=30$ км/с.

647. Свет, испускаемый с поверхности фотосферы звезды, наблюдается на Земле. В какую сторону будет происходить гравитационное смещение спектральных линий?

648. Оценить гравитационное смещение длины волны излучения, испускаемого с поверхности нейтронной звезды, считая ее массу равной массе Солнца ($M=2 \cdot 10^{33}$ г), плотность постоянной по всему объему звезды, а среднее расстояние между нейтронами равным $3 \cdot 10^{-13}$ см.

649. На Земле принимаются радиосигналы с искусственного спутника Земли, находящегося на высоте $h=800$ км над земной поверхностью. Найти относительное изменение частоты радиоволны со спутника, обусловленное гравитационным полем Земли. В какую сторону спектра будет происходить гравитационное смещение, в красную или фиолетовую?

650. Найти относительное изменение частоты, обусловленное земным полем тяготения, когда передатчик расположен на горе на высоте $h=5$ км выше приемника.

651. Показать, что гравитационное смещение частоты радиосигнала с искусственного спутника Земли есть эффект второго порядка относительно v/c (v — скорость спутника, c — скорость света).

652. В задаче 649 учесть эффект Доплера (линейный и квадратичный). Найти полное относительное изменение частоты, обусловленное эффектом Доплера и гравитационным полем Земли, если: 1) спутник вращается точно по окружности; 2) спутник движется под углом $\Theta=89^\circ$ к вертикали, приближаясь к Земле со скоростью $v=7,5$ км/с.

653. Еще в 1798 г. Лаплас отметил, что в случае достаточно массивной звезды лучи света не смогут ее покидать в силу их притяжения звездой и что «по этой причине самые большие светящиеся тела во Вселенной будут для нас невидимыми». Лаплас опирался, разумеется, на ньютоновскую механику и закон всемирного тяготения, в сочетании с корпускулярной теорией света. Каков, с этой точки зрения, должен быть радиус r_g тела (звезды) массы M , чтобы его поверхность стала невидимой?

§ 10. Давление света

654. Исходя из представления, что свет состоит из фотонов, каждый из которых обладает импульсом $h\nu/c$, определить давление P световой волны на плоское зеркало, предполагая, что коэффициент отражения зеркала равен r , а угол падения равен ϕ . Определить также тангенциальную силу T , действующую на единицу поверхности зеркала со стороны падающего излучения.

655. Решить предыдущую задачу в предположении, что поверхность, на которую падает световая волна, идеально матовая (удовлетворяет закону Ламберта).

656. Показать, что давление излучения при нормальном падении света на идеальное зеркало равно $2u$, а на полностью поглощающую поверхность равно u , где u — плотность энергии падающего излучения.

657. Каково давление света на идеальное зеркало, если излучение изотропно?

658. Найти световое давление солнечного излучения на квадратный метр земной поверхности, перпендикулярной к направлению излучения. Солнечная постоянная (см. примечание к задаче 196) равна 2 кал/(см²·мин).

Абсорбией в земной атмосфере пренебречь. Рассмотреть три случая: 1) земная поверхность — абсолютно черная; 2) земная поверхность — абсолютно зеркальная; 3) земная поверхность — абсолютно отражающая, но матовая (удовлетворяет закону Ламберта).

659. П. Н. Лебедев впервые экспериментально доказал существование светового давления на твердые тела и газы и измерил его. Прибор Лебедева для исследования светового давления на твердые тела состоял из легкого подвеса на тонкой нити, по краям которого были прикреплены очень тонкие и легкие крыльшки (рис. 66). Крыльшко имело форму кружка диаметром в 5 мм. Одно из крыльышек было за-

чернено, а другое оставалось блестящим. Подвес помещался в откаченном сосуде, образуя весьма чувствительные крутильные весы. С помощью специальных приспособлений на крыльышки посыпался поток лучистой энергии мощностью 1,2—1,8 калорий в минуту. Определить силу светового давления на зачерненный кружок прибора П. Н. Лебедева, когда мощность падающего на него потока лучистой энергии составляет $Q=1,5$ калории в минуту¹⁾.

660. Плоская световая волна падает на поверхность шара, размеры которого велики по сравнению с длиной световой волны. Предполагая, что поверхность шара: 1) абсолютно черная; 2) абсолютно зеркальная; 3) абсолютно матовая (удовлетворяет закону Ламберта), выразить силу светового давления на шар через плотность падающего излучения.

661. В каком случае световое давление на шар плоской неполяризованной волны будет больше: когда поверхность шара идеально отражающая или когда она отражает свет частично, а остальной свет поглощается внутри шара? Размеры шара велики по сравнению с длиной световой волны.

662. Определить силу светового давления F_1 солнечного излучения на поверхность земного шара, считая ее абсолютно черной. Найти отношение этой силы к силе гравитационного притяжения Солнца F_2 . Средняя плотность Земли $\delta=5,5$ г/см³.

663. По теории Бредихина форма кометных хвостов объясняется действием на частицы кометы отталкивающих сил, исходящих от Солнца и изменяющихся обратно пропорционально квадрату расстояния от него. Было высказано предположение, что эти силы суть силы светового давления, так как последние убывают с расстоянием по тому же закону²⁾. Считая для простоты частицу шариком, оценить

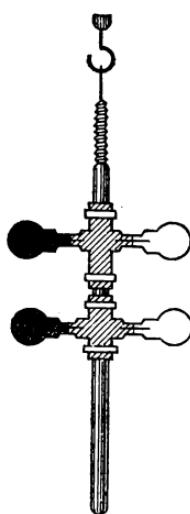


Рис. 66.

¹⁾ Описание опытов Лебедева можно найти в следующих книгах: П. Н. Лебедев, Собрание сочинений, Изд-во АН СССР, 1963; Г. С. Ландсберг, Оптика, изд. 5-е, «Наука», 1976.

²⁾ По-видимому, в большинстве случаев отталкивание кометных хвостов обусловлено не столько световым давлением, сколько другими причинами, например корпускулярным излучением Солнца.

по порядку величины его радиус a , при котором давление солнечного излучения на шарик превосходит силу гравитационного притяжения Солнца. Считать, что поверхность шарика — абсолютно черная, а его плотность $\delta=1 \text{ г/см}^3$.

Указание. Так как отношение силы светового отталкивания к силе гравитационного притяжения не зависит от расстояния до Солнца, то можно считать, что шарик находится на таком же расстоянии от Солнца, что и Земля, и значение плотности энергии солнечного излучения взять такое же, как вблизи Земли.

664. Принимая во внимание, что давление света на идеально отражающее зеркало при нормальном падении равно удвоенной плотности энергии падающей волны, найти закон изменения плотности световой энергии при отражении от медленно движущегося идеального зеркала.

665. На твердое тело, находящееся в вакууме, падает интенсивный пучок света. При каких условиях импульс, сообщаемый телу, может превосходить значение импульса, которое оно получает в результате светового давления при зеркальном отражении света? При нормальном падении света этот импульс равен $2uSt$, где u — плотность энергии в пучке, S — площадь его поперечного сечения и t — длительность освещения.

666. Существуют лазеры, мощность излучения которых в импульсе составляет сотни мегаватт. Допустим, что мощность лазера равна $W=500 \text{ МВт}$, а площадь поперечного сечения светового пучка $S=1 \text{ см}^2$. Пусть луч сфокусирован идеальной линзой с фокусным расстоянием $f=5 \text{ см}$. Оценить напряженность электрического поля E и давление света P в фокусе такой линзы. Длина волны $\lambda=6943 \text{ \AA}$.

667. Лазер на рубине излучает в импульсе длительностью $\tau=0,5 \text{ мс}$ энергию $\mathcal{E}=1 \text{ Дж}$ в виде почти параллельного пучка с сечением $s=1 \text{ см}^2$. Рабочая длина волны лазера $\lambda=6943 \text{ \AA}$. Определить следующие величины: 1) давление несфокусированного пучка света P на площадку, перпендикулярную к пучку; 2) давление света P на площадку, перпендикулярную к пучку, при максимально возможной концентрации светового пучка (при фокусировке в область с площадью поперечного сечения порядка λ^2); 3) напряженность электрического поля E в области максимально возможной концентрации светового пучка.

Примечание. Считать излучение лазера во время импульса равномерным (усреднение).

§ 11. Молекулярная оптика и смежные вопросы из других разделов физики

668. Определить поляризумость α молекулы CO_2 , если показатель преломления углекислоты при нормальных условиях равен $n=1,000449$, а число молекул в одном кубическом сантиметре (число Лошмидта) $N=2,687 \cdot 10^{19}$.

669. Показать, что модель атома Дж. Томсона приводит к соотношению $\alpha=a^3$, где a — радиус атома Томсона.

П р и м е ч а н и е. В модели Томсона атом представляется собой шар, суммарный положительный заряд которого равен e и распределен равномерно по объему шара. Внутри шара находится точечный отрицательный электрон с зарядом $-e$.

670. Найти максимальную скорость свободного электрона при вынужденных колебаниях его в поле солнечного излучения вблизи земной поверхности (см. задачу 196). Определить также отношение максимальной силы F_m , действующей на такой электрон со стороны магнитного поля, к максимальной силе F_e , действующей со стороны электрического поля. Поле солнечного излучения заменить монохроматическим $E=E_0 \cos \omega t$ с длиной волны $\lambda=5500 \text{ \AA}$.

У к а з а н и е. В первом приближении действие магнитного поля волны можно не учитывать. Найдя движение электрона, можно вычислить силу, действующую на него со стороны магнитного поля.

671. Определить среднюю силу светового давления на колеблющийся электрон в поле плоской монохроматической световой волны частоты ω . Помимо поля световой волны на электрон действуют еще две силы: 1) квазиупругая сила $-m\omega_0^2 x$, под действием которой он совершил бы свободные гармонические колебания с собственной частотой ω_0 ; 2) «сила трения» $-m\dot{x}$, благодаря которой электрон поглощает свет. Рассчитать также среднюю энергию ϵ , поглощаемую электроном в одну секунду, и выразить через нее среднюю силу светового давления. Показать, что если бы поглощения света не было, то средняя сила светового давления равнялась бы нулю.

672. Величина постоянного дипольного момента полярной молекулы p_0 порядка 10^{-18} (в системе СГСЭ), поляризуемость молекулы α порядка 10^{-24} см^3 . Сравнить постоянный дипольный момент молекулы: 1) с моментом, индуцированным в поле световой волны солнечного излучения, если напряженность электрического поля солнечного излучения

у земной поверхности около 7 В/см; 2) с моментом, индуцированным в поле напряженности 10 000 В/см¹).

673. Чем объясняется, что соотношение $n = \sqrt{\epsilon}$ (n — показатель преломления, а ϵ — диэлектрическая постоянная) так резко нарушается для воды в оптической области электромагнитного спектра?

674. Плотность водорода при 0°C и давлении 760 мм рт.ст. 0,0000896 г/см³, а его показатель преломления 1,000138. Плотность жидкого водорода 0,068 г/см³. Считая, что формула Лоренца — Лоренца применима к этому случаю, найти показатель преломления жидкого водорода. (Эксперимент дает значение $n=1,12$.)

675. Получить формулу для диэлектрической проницаемости $\epsilon(\omega)$ ионизованного газа в монохроматическом электрическом поле $E=E_0 \cos \omega t$. Столкновениями электронов и ионов пренебречь.

676. Может ли показатель преломления быть меньше единицы?

677. В области аномальной дисперсии $dv/d\lambda < 0$ (v — фазовая скорость, λ — длина волны в среде). В этой области возможен случай, когда групповая скорость $u=v-\lambda dv/d\lambda$ будет больше скорости света c в вакууме. Как согласовать это с выводом теории относительности о невозможности сигналов, распространяющихся со скоростью больше c ?

678. Диэлектрическая проницаемость плазмы $\epsilon(\omega)$ (см. задачу 675) отрицательна, если $\omega < \omega_0$. В этом случае показатель преломления $n = \sqrt{\epsilon}$ — чисто мнимая величина.

¹⁾ Значения α и p_0 для некоторых веществ приводятся в нижеследующей таблице. В случае анизотропных молекул под α понимается среднее из значений трех главных поляризумостей молекулы.

Вещество	$\alpha, 10^{-25} \text{ см}^3$	10^{-18} ГГСЭ
Водород H ₂	7,9	0,0
Азот N ₂	17,6	0,0
Оксис углерода CO	19,5	0,11
Углекислота CO ₂	26,5	$0,0 \pm 0,02$
Водяной пар H ₂ O	—	1,79
Хлороформ CHCl ₃	82,3	1,05
Хлористый метил CH ₃ Cl	42,3	1,86
Ацетон CH ₃ COCH ₃	63,3	2,73
Бензол C ₆ H ₆	103,2	0,0
Нитробензол C ₆ H ₅ NO ₂	129,2	3,8

Выяснить физический смысл чисто мнимого показателя преломления.

679. Радиоволна распространяется вверх. Волны каких частот могут проходить через ионосферу? Какие волны будут полностью отражаться?

680. Радиосигнал определенной частоты $v = \omega/2\pi$ посыпается вверх и отражается на определенной высоте. Определить концентрацию электронов в точке отражения.

681. Концентрация электронов на Солнце на расстоянии $r=0,06 R$ от границы фотосфера ($R=6,95 \cdot 10^{10}$ см — радиус Солнца) примерно равна $N=2 \cdot 10^8$ см⁻³. Могут ли радиоволны из этой области Солнца достигать Земли, если длина волн (в вакууме) равна: 1) $\lambda=1$ м; 2) $\lambda=10$ м; 3) $\lambda=50$ м?

682. Получить выражение для фазовой скорости радиоволны в ионосфере в зависимости от длины волны λ в ионосфере. (См. задачу 675.)

683. При каких условиях в плазме могут существовать продольные колебания электрического поля? Чему равны фазовая и групповая скорости соответствующих волн?

684. Плотность электромагнитной энергии в диспергирующей среде легко определить в случае газа. В этом случае она слагается из: плотности энергии самого электромагнитного поля (т. е. поля в вакууме) и плотности энергии частиц, находящихся в поле. Последняя энергия в свою очередь состоит из: кинетической энергии колеблющихся частиц и потенциальной энергии деформированных квазиупругих диполей. Из этих соображений найти выражение для плотности электромагнитной энергии в непоглощающей диспергирующей среде (ср. с задачей 587). Рассмотреть также частный случай плазмы.

685. Какая картина будет наблюдаться в спектроскопе, если на его щель сфокусирована система горизонтальных интерференционных полос, получаемых от белого источника света? Как изменится эта картина, если в одно из плеч интерферометра ввести стеклянную пластинку? Дисперсию показателя преломления стеклянной пластиинки не учитывать¹⁾.

686. Как изменится картина, наблюдаемая в спектроскопе, скрещенный с интерферометром Жамена (см. предыдущую задачу), если изменять толщину и дисперсию вноси-

¹⁾ Задачи 685—688 составлены на основе классических работ Д. С. Рождественского, разработавшего «метод крюков» для исследования аномальной дисперсии.

мой в одно из плеч стеклянной пластинки? Как изменится картина при переносе пластинки из одного плеча в другое?

687. Какой вид будет иметь интерференционная картина (см. задачу 685), если в одном из плеч интерферометра находится слой паров натрия, а в другом стеклянная пластина? 1) Рассмотреть вид полос вблизи линии поглощения натрия. 2) Найти выражение для $(dn/d\lambda)_{\text{Na}}$ в вершине крюка (λ — длина волны в вакууме), если толщина стеклянной пластины равна $l_{\text{ст}}$, толщина слоя паров натрия l_{Na} , а их показатели преломления $n_{\text{ст}}$ и n_{Na} соответственно.

П р и м е ч а н и е. Вершиной крюка называется точка, в которой касательная к интерференционной полосе горизонтальна.

688. Расстояние между вершинами крюков с двух сторон резонансной линии в длинах волн равно $2\Delta\lambda$, толщины стеклянной пластины и слоя исследуемого газа $l_{\text{ст}}$ и l соответственно, показатель преломления стекла пластины $n_{\text{ст}}$. Определить силу осциллятора f_0 , соответствующую данной линии.

П р и м е ч а н и е. Для достижения совпадения классической теории дисперсии с опытом нужно в формулах классической теории заменить число рассеивающих электронов N_0 числом $f_0 N_0$, где f_0 называется силой осциллятора. При решении принять во внимание, что показатель преломления газа близок к единице.

689. Свет частоты ω рассеивается на затухающем гармоническом осцилляторе с собственной частотой ω_0 , отличной от ω . 1) Каков будет спектральный состав рассеянного света? 2) Какова будет частота рассеянного света после прекращения действия падающей волны?

690. Как известно, линейный осциллятор не излучает в направлении своей оси. Используя этот факт, дать молекулярное объяснение наличия угла полной поляризации (угла Брюстера) при отражении света от тела ($n > 1$). Молекулы тела считать изотропными.

У к а з а н и е. См. задачу 25.

691. Отступления от формул Френеля (см. задачу 452) обычно связаны с наличием на поверхности отражающего тела переходного слоя, показатель преломления которого отличен от показателя преломления отражающей среды, а толщина мала по сравнению с длиной световой волны. Объяснить на основе молекулярных представлений, почему при наличии переходного слоя закон Брюстера не соблюдается?

692. Опыт показывает, что закон Брюстера применим не только к изотропным средам, молекулы которых сами изотропны, но также и к изотропным средам, состоящим из анизотропных молекул. Как согласовать этот факт с молекулярными представлениями, если для анизотропной молекулы направление индуцированного дипольного момента молекулы, вообще говоря, не совпадает с направлением возбуждающего электрического поля? Ведь в таком случае для света, поляризованного перпендикулярно к плоскости падения, возбужденные дипольные моменты молекул среды не будут параллельны направлению отраженного луча. Следовательно, молекулы среды будут излучать в этом направлении и мы должны были бы ожидать появления отраженного света вопреки закону Брюстера.

693. С молекулярной точки зрения распространение света в среде заключается в следующем. Под влиянием падающей световой волны, а также под влиянием излучений соседних молекул и атомов каждая молекула (или атом) приобретает дипольный момент, меняющийся во времени, и поэтому сама становится источником вторичных световых волн. Эти вторичные волны распространяются в пространстве между молекулами и атомами со скоростью света c в вакууме. Поскольку вторичные волны в конце концов возбуждаются одной и той же падающей волной, они когерентны и интерферируют друг с другом. Результат этой интерференции вне среды есть отраженная волна, а внутри среды — преломленная волна. При исследовании отражения света нас интересует поле на таких расстояниях от границы среды, которые велики не только по сравнению с межатомными и межмолекулярными расстояниями, но и по сравнению с длиной волны. Вычисляя поля излучения на таких расстояниях, дискретные излучающие центры — молекулы или атомы — можно заменить источниками с непрерывно определенным вектором поляризации: каждый элемент объема среды dV (размер которого мал по сравнению с λ^3) излучает как диполь с дипольным моментом $\mathbf{P} dV$ (\mathbf{P} — вектор поляризации среды). Пусть среда граничит с вакуумом вдоль плоскости, и на нее падает плоская монохроматическая волна. В установившемся состоянии $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}r)}$. Среду можно разбить на слои, параллельные границе раздела. Каждый из слоев будет излучать в вакуум плоскую волну в направлении отраженного света. Подберем толщину слоев l так, чтобы два соседних слоя излучали плоские волны в противоположных фазах. Показать, что напряжен-

нность поля волны, излучаемой в вакуум всей средой, равна половине напряженности поля волны, излучаемой первым слоем. Найти также толщину слоя l .

694. В неограниченной изотропной среде может распространяться однородная электромагнитная волна и соответствующая ей однородная волна поляризации среды. Пользуясь этим, можно следующим образом вывести формулы Френеля для отражения света от среды, граничащей с вакуумом. Пусть в неограниченной среде распространяется однородная волна поляризации $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}r)}$ с $k_z > 0$ (ось Z направлена вертикально вниз). Разделим всю среду на две половины плоскостью $z=0$. Влияние верхней половины на нижнюю сводится к тому, что она излучает вниз плоскую волну (распространяющуюся со скоростью света в вакууме) с волновым вектором \mathbf{f} , определяемым компонентами:

$$f_x = k_x, \quad f_y = k_y, \quad f_z = +\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}.$$

Если часть среды выше плоскости $z=0$ убрать, но сохранить ее поле излучения, то состояние среды ниже плоскости $z=0$ останется неизменным. Но то же состояние в нижнем полупространстве мы получим, послав из вакуума плоскую монохроматическую волну на среду, заполняющую нижнее полупространство. Следовательно, падающая волна эквивалентна волне, излучаемой в нижнее полупространство воображаемой средой, заполняющей верхнее полупространство. Пользуясь этим и результатом решения предыдущей задачи, получить формулы Френеля для отражения света.

695. Расположенный в среде с показателем преломления $n = \sqrt{\epsilon}$ колеблющийся точечный диполь (осциллятор) с дипольным моментом \mathbf{p} дает поле излучения \mathbf{E} . Как будет излучать тот же диполь (т. е. диполь с тем же дипольным моментом \mathbf{p}), если его поместить в узкую щель: 1) параллельно щели; 2) перпендикулярно к щели? Ширина щели мала по сравнению с длиной волны. Щель заполнена однородным веществом с диэлектрической проницаемостью ϵ' .

Указание. Применить электродинамическую теорему взаимности¹⁾. Ее можно сформулировать следующим образом. Пусть имеются два точечных диполя (осциллятора)

¹⁾ Доказательство теоремы взаимности см., например, в книге Л. И. Мандельштам, Полное собрание трудов, т. III, стр. 328, Изд-во АН СССР, 1950.

с дипольными моментами \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 . Пусть поле диполя 1 в точке нахождения диполя 2 равно $\mathbf{E}_1(2)$, а поле диполя 2 в точке нахождения диполя 1 равно $\mathbf{E}_2(1)$. Тогда по теореме взаимности $\mathbf{p}_1\mathbf{E}_2(1)=\mathbf{p}_2\mathbf{E}_1(2)$. Теорема взаимности применима к любым средам (как однородным, так и неоднородным), за исключением сред, в которых имеет место магнитное вращение плоскости поляризации (эффект Фарадея). (См. задачи 717 и 718.)

696. Решить предыдущую задачу для цилиндрической полости, когда диполь \mathbf{p} ориентирован: 1) параллельно оси полости; 2) перпендикулярно к оси. Радиус цилиндрической полости мал по сравнению с длиной волны.

697. То же для сферической полости.

698. Найти спектральное распределение света, излучаемого разреженным газом, находящимся в термодинамическом равновесии при температуре T . Предположить, что атомы газа излучают лишь одну спектральную линию, частота которой равна v_0 в системе координат, связанной с атомом.

699. Найти полуширину линии H_α , излучаемой водородом при температуре 50°C . Считать, что уширение линии вызвано лишь эффектом Доплера. Длина волны линии H_α $\lambda=6563 \text{ \AA}$.

Примечание. Полушириной линии называется величина $\Delta\lambda=\lambda_0-\lambda_{1/2}$, где λ_0 — длина волны, соответствующая центру линии, и $\lambda_{1/2}$ — длина волны, при которой $I=1/2I_0$.

700. Найти $\Delta\lambda/\lambda$, если источник движется со скоростью v в среде с показателем преломления n .

701. Рассмотреть движение упруго связанного электрона во внешнем магнитном поле и показать, что движение при наличии поля отличается от движения при его отсутствии наложением равномерного вращения вокруг направления поля с частотой $\omega_L=-eH/(2mc)$. Предполагается, что частота ω_L мала по сравнению с собственной частотой ω_0 упруго связанного электрона.

702. При помещении в магнитное поле энергия электрона, врачающегося по орбите (с заданным радиусом r) с частотой ω_0 , изменяется в силу появления ларморовой прецессии. Каково изменение энергии электрона и каков механизм этого изменения?

703. Частица с зарядом e и массой m движется по окружности радиуса r со скоростью v_0 . Пусть движение по той же окружности (под действием соответствующих сил, которые обеспечивают достаточно малое изменение радиуса орбиты)

имеет место и при изменении скорости частицы (примером может служить движение по «желобу»). Показать, что при включении магнитного поля с напряженностью H угловая скорость частицы изменяется на величину $\omega_L = -eH/(2mc)$. (Это утверждение в применении к рассматриваемому случаю составляет содержание теоремы Лармора.)

704. Электромагнитная волна распространяется в плазме (ионизованном газе), находящейся в магнитном поле напряженностью H . Направление распространения волны совпадает с направлением вектора H . Пренебрегая столкновениями частиц (т. е. поглощением), определить характер поляризации волны и соответствующий ей показатель преломления.

705. Постоянная Верде R для CS_2 (при 0°C и $\lambda=5890 \text{ \AA}$) равна $0,04347$ угл. мин/($\mathcal{E}\cdot\text{см}$). Найти угол, на который поворачивается плоскость поляризации света при его прохождении через слой CS_2 толщиной в 1 см, находящийся в поле $H=10\,000 \mathcal{E}$.

П р и м е ч а н и е. Угол поворота плоскости поляризации в магнитном поле H при прохождении слоя вещества толщины l определяется выражением $\alpha=RlH$, где R — постоянная Верде.

706. Определить постоянную Верде R для железа, если известно, что слой железа толщиной 10^{-3} см поворачивает плоскость поляризации на 130° в поле $H=10\,000 \mathcal{E}$ при $\lambda=5890 \text{ \AA}$.

707. Выразить постоянную Верде R через показатели преломления n_- и n_+ для право- и левополяризованного по кругу света, проходящего вдоль линий магнитного поля.

708. Показать, что $n_- - n_+ \approx 2 \frac{\partial n}{\partial \omega} \omega_L$, где $\omega_L = -eH/(2mc)$ — угловая скорость прецессии электронных орбит в магнитном поле, n_- и n_+ — показатели преломления для световых лучей соответственно с правой и левой круговой поляризацией. Получить отсюда формулу для постоянной Верде.

709. Определить знак вращения плоскости поляризации в магнитном поле при распространении света в прозрачной среде (т. е. в среде с малым поглощением).

У к а з а н и е. См. две предыдущие задачи.

710. Определить отношение заряда электрона e к его массе m , если известно, что угол магнитного вращения α для водорода при давлении 85 атм равен $0,063'$; $\lambda_0 \frac{dn}{d\lambda_0} = 0,0625 \cdot 10^{-4}$ ($\lambda=5890 \text{ \AA}$), $l=1$ см, $H=10\,000 \mathcal{E}$.

711. Линейно-поляризованное радиоизлучение от одной из радиогалактик проходит через область ионизованного межзвездного газа в направлении магнитного поля с напряженностью $H \approx 10^{-4}$ Э. Средняя концентрация электронов $N = 1$ см⁻³, размер области $L = 10^{18}$ см. Найти угол поворота α плоскости поляризации для излучения с длиной волны $\lambda = 10$ см.

712. Найти минимальную разрешающую способность спектрального аппарата, необходимую для наблюдения нормального поперечного эффекта Зеемана для линии $\lambda = 3000$ Å в магнитном поле напряженностью $H = 10\ 000$ Э.

713. Простой эффект Зеемана наблюдается так, что направление наблюдения противоположно направлению силовых линий. Какая из компонент имеет правую круговую поляризацию и какая левую?

714. Рассмотреть качественно влияние внешнего магнитного поля на поляризацию излучения затухающего осциллятора в случае, если до включения поля: 1) направление колебаний параллельно направлению поля, а направление наблюдения перпендикулярно к полю; 2) направление колебаний перпендикулярно к полю, а направление наблюдения или параллельно полю, или перпендикулярно к полю.

П р и м е ч а н и е. Рассмотрение влияния поля на излучение затухающего осциллятора дает классическую теорию влияния магнитного поля на резонансную флуоресценцию.

715. Ширина резонансной линии ртути $\lambda = 2537$ Å соответствует времени жизни атома ртути в возбужденном состоянии, равном $T = 10^{-7}$ с. Определить по порядку величины магнитное поле, вызывающее почти полную деполяризацию резонансного излучения ртути при наблюдении его по полю. Направление колебаний при отсутствии поля перпендикулярно к направлению наблюдения.

716. Может ли постоянное электрическое поле вызвать изменение частоты колебаний гармонического осциллятора? В качестве модели гармонического осциллятора принять электрон, на который действует квазиупругая сила.

717. Имеются два николя N_1 и N_2 (рис. 67), главные плоскости которых повернуты друг относительно друга на угол 45° . Между николями в продольном магнитном поле помещен слой вещества, врачающий плоскость поляризации (эффект Фарадея). На какой угол слой вещества должен вращать плоскость поляризации, чтобы свет прохо-

дил через систему только в одном направлении (например, от тела A к телу B), а в обратном направлении не проходил? (Оптический вентиль.)

718. Как будет вести себя оптический вентиль, описанный в предыдущей задаче, если направление магнитного поля изменить на противоположное, оставляя без изменения

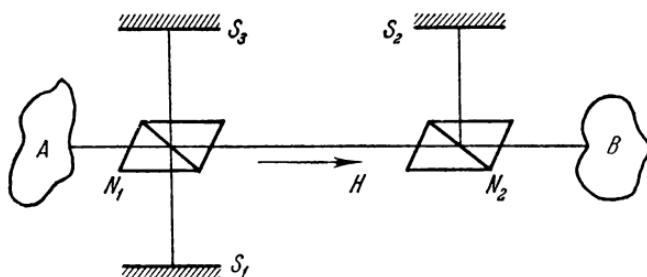


Рис. 67.

взаимное расположение николей и величину напряженности магнитного поля?

719. Может ли установка, описанная в задаче 717, быть оптическим вентилем, если между николями поместить слой естественно активного вещества без магнитного поля?

720. Разъяснить следующий парадокс (парадокс Вина). В адиабатической оболочке помещены два одинаково нагретых тела A и B (см. рис. 67), а между ними световой вентиль. Свет, излученный телом A , падает на николь N_1 . Половина падающей энергии I , т. е. $I/2$, проходит через николь, а другая половина, испытав полное внутреннее отражение в николе, возвращается зеркалом S_1 к телу A (применяя зеркало, можно не учитывать нагревания николя). Другая половина энергии $I/2$, пройдя через николь N_1 , полностью пройдет через николь N_2 и поглотится телом B . Свет же от тела B не пройдет через вентиль. Половина излученной этим телом энергии I , равная $I/2$, испытает полное внутреннее отражение в николе N_2 и после отражения от зеркала S_2 вернется к телу B . Другая половина энергии, пройдя через николь N_2 и врачающую среду, испытает поворот плоскости поляризации на 45° и поэтому не сможет пройти через николь N_1 , а претерпит в нем полное внутреннее отражение. Добавочным зеркалом S_3 эта часть энергии будет отражена обратно, и после полного внутреннего отражения в николе N_1 вернется к телу B . Таким образом, тело

A получит энергию $I/2$, а тело *B* — энергию $3I/2$ и будет нагреваться в противоречии со вторым началом термодинамики.

721. Наблюдается эффект Коттона — Мутона в ацетоне. Вычислить разность фаз δ , возникающую между компонентами света, поляризованными по магнитному полю и перпендикулярно к полю (свет распространяется перпендикулярно к полю). Постоянная Коттона — Мутона для ацетона при $t=20^{\circ}\text{C}$ и для $\lambda_0=5780 \text{ \AA}$ равна $C=37,6 \cdot 10^{-13} \text{ рад}/(\mathcal{E}^2 \cdot \text{см})$. Напряженность поля $H=20\,000 \text{ Э}$, толщина слоя 2 см.

722. Определить разность $n_o - n_e$ (n_o и n_e — показатели преломления обычного и необычного лучей) при наблюдении эффекта Керра в нитробензоле в поле напряженностью 3000 В/см. Постоянная Керра $B=220 \cdot 10^{-7} \text{ с}^2/\text{г}$ (при $t=20^{\circ}\text{C}$ и $\lambda_0=5890 \text{ \AA}$).

723. Определить в условиях предыдущей задачи сдвиг фаз δ , возникающий между компонентами света, поляризованного по полю и перпендикулярно к полю. Длина пластины конденсатора равна 4 см.

724. Какова должна быть напряженность поля в условиях предыдущей задачи, чтобы $\delta=\pi/2$?

725. На ячейку Керра падает свет, поляризованный под углом 45° к полю. Сдвиг фаз, вносимый ячейкой, равен $\pi/2$. Какова интенсивность света I , проходящего через николь, поставленный за конденсатором Керра и пропускающий свет, плоскость поляризации которого перпендикулярна к плоскости поляризации падающего света?

726. Указать качественно, при каких ориентациях эллипсоида оптической поляризуемости полярной молекулы относительно ее постоянного дипольного момента вещества при внесении его в электрическое поле ведет себя как: 1) положительный кристалл; 2) отрицательный кристалл. Какая из возможных ориентаций наиболее благоприятна для появления эффекта Керра?

727. Рассмотреть газ, состоящий из полностью анизотропных молекул¹⁾ (в таких молекулах электрон может ко-

¹⁾ В действительности полностью анизотропных молекул не существует. Поляризуемость α анизотропной молекулы является тензором. Если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — главные значения этого тензора, то полная анизотропия означала бы, что два из этих значений обращаются в нуль. Результаты решения задач 727 и 728 можно приблизительно применять к таким молекулам, у которых одно из значений $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ велико по сравнению с двумя другими. В основном эти задачи следует рассматривать как качественные. Их цель — пояснить на простой модели основы теории эффекта Керра.

лебаться лишь в одном фиксированном направлении относительно осей молекулы). Вычислить показатели преломления n_z и n_y для волн, электрические поля которых направлены по осям Z и Y , в зависимости от распределения осей молекул по углам; считать, что $n_z - n_y \ll n_0$ и n_0 близко к единице (n_0 — показатель преломления при изотропном распределении молекул). Принять также, что распределение осей молекул зависит лишь от их угла с осью Z .

728. Вычислить постоянную Керра $B = (n_z - n_y) / (\lambda_0 E_0^2)$ для газа, состоящего из полностью анизотропных молекул без постоянного дипольного момента. Постоянное электрическое поле, равное E_0 , направлено по оси Z . Величину $\beta = \alpha E_0^2 / (2kT)$ считать малой по сравнению с единицей.

729. Вычислить постоянную Керра B для газа, состоящего из полностью анизотропных молекул с постоянным дипольным моментом p_0 , направление которого совпадает с направлением поляризуемости молекулы. Считать момент, индуцированный постоянным внешним полем, малым по сравнению с p_0 (т. е. пренебречь индуцированным моментом), а величину $\beta = p_0 E_0 / (kT)$ — малой по сравнению с единицей.

730. Средняя по времени энергия света, излучаемого линейным вибратором в телесном угле $d\Omega$ в единицу времени, равна

$$I(\vartheta) d\Omega = \frac{\vec{p}^2 \sin^2 \vartheta}{4\pi c^2} d\Omega,$$

где ϑ — угол между электрическим моментом вибратора \vec{p} и направлением наблюдения. Используя эту формулу, рассмотреть рассеяние света свободным электроном и определить эффективное сечение σ для этого процесса.

П р и м е ч а н и е. Эффективным сечением σ называется отношение энергии, рассеиваемой электроном в единицу времени, к плотности потока энергии падающей световой волны.

731. Каково соотношение между эффективными сечениями светового рассеяния σ для протона и электрона?

732. На электрон падает неполяризованный свет; наблюдение рассеянного излучения ведется под углом ϑ к направлению первичного пучка. Найти интенсивность света $d\Phi(\vartheta)$, рассеянного в телесном угле $d\Omega$ по направлению к наблюдателю.

733. Упруго связанный электрон, собственная угловая частота которого равна ω_0 , освещается поляризованным све-

том с частотой ω , сильно отличающейся от ω_0 . Найти эффективное сечение рассеяния σ , а также $I(\vartheta)$.

Указание. См. задачу 730.

734. Решить предыдущую задачу с учетом затухания осциллятора. Считать, что «сила трения» равна $R = -m\ddot{x}$. Найти приближенное значение для σ вблизи резонанса.

735. Найти отношение Σ потока энергии рассеянного газом излучения к потоку энергии падающей плоской волны при нормальном давлении P и температуре $T = 273$ К. Молекулы газа можно считать линейными осцилляторами, т. е. предполагать, что у молекулы имеется лишь одна собственная частота. Длина рассеивающего объема вдоль луча $l = 10$ см. Частота падающего света $\omega = 3 \cdot 10^{15}$ с⁻¹, собственная частота осцилляторов $\omega_0 = 6 \cdot 10^{15}$ с⁻¹.

736. Решить предыдущую задачу в предположении, что длина волны падающего света в одном случае равна $\lambda_1 = 7000$ Å, а в другом $\lambda_2 = 4000$ Å. Каково отношение $A = \Sigma(\lambda_1)/\Sigma(\lambda_2)$? Сравнить A с отношением $B = (\lambda_2/\lambda_1)^4$.

737. Объяснить качественно голубой цвет неба и красную окраску заходящего Солнца.

738. Линейно-поляризованный свет рассеивается газом, молекулы которого изотропны. Принимая, что молекулы рассеивают свет независимо друг от друга, а их излучение не интерферирует, вычислить отношение $d\Sigma$ потока энергии рассеянного излучения, приходящегося на телесный угол $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\phi$ (ϑ — угол между направлением наблюдения и вектором E_0 падающего света), к потоку энергии падающего излучения. Объем рассеивающей области V ($V \ll r^3$, где r — расстояние от рассеивающего объема до наблюдателя), число молекул в единице объема N , показатель преломления газа n , длина волны света λ .

739. Наблюдение рассеянного света ведется в плоскости, перпендикулярной к E_0 (см. предыдущую задачу). 1) Определить поток рассеянного излучения $d\Phi$, приходящийся на телесный угол $d\Omega$. 2) Найти тот же поток, если падающий свет — естественный.

740. Рассмотреть рассеяние света в газе, молекулы которого полностью анизотропны (см. задачу 727). Принимая, что молекулы распределены хаотически и рассеивают свет независимо друг от друга, вычислить плотность потока I рассеянного излучения для света с колебаниями электрического поля по осям OX и OZ , если наблюдение ведется по оси OY , а падающий свет распространяется по оси OX и линейно-поляризован, причем вектор E_0 направлен по оси

OZ. Определить также степень деполяризации рассеянного света $\Delta = I_x/I_z$.

741. Решить предыдущую задачу, предполагая, что падающий свет — естественный, т. е. $\overline{\mathbf{E}_z^2}=\overline{\mathbf{E}_y^2}$.

742. Найти отношение Σ потока энергии рассеянного воздухом излучения к плотности потока энергии падающей волны при температуре $T=273$ К и нормальном давлении. Показатель преломления $n=1,00029$. Длина волны $\lambda=5000$ Å, длина рассеивающего объема вдоль луча $l=1$ м.

743. Ту же задачу решить для сероуглерода (CS_2). Длина рассеивающей области $l=10$ см, $n=1,628$. Плотность CS_2 равна 1,264 г/см³.

744. На 1 см² поверхности атмосферы падает в среднем около 2 кал солнечной энергии в 1 мин. Принимая, что плотность атмосферы постоянна и равна плотности воздуха на поверхности Земли, а высота ее $h=10$ км («эквивалентная атмосфера»), вычислить поток энергии S , достигающий земной поверхности, считая излучение монохроматическим с длиной волны: 1) $\lambda=6000$ Å и 2) $\lambda=4000$ Å.

Указание. См. задачу 742.

745. Параллельный пучок линейно-поляризованных лучей пропускается через высокую трубку, наполненную слегка замутненным раствором сахара. В случае белого света сбоку наблюдается ряд винтовых линий различной окраски. 1) Объяснить их происхождение. 2) Выяснить зависимость шага винта от концентрации раствора и от цвета.

Примечание. Сахар — оптически активное вещество, т. е. при распространении в растворе сахара линейно-поляризованного света происходит вращение плоскости поляризации.

746. Свет, поляризованный по кругу, рассеивается в газе, молекулы которого оптически изотропны. Описать, как будет поляризован рассеянный свет в зависимости от угла ϑ между направлениями распространения падающего и рассеянного света. В случае эллиптической поляризации рассеянного света определить ориентацию эллипса колебаний и коэффициент эллиптичности ρ , т. е. отношение малой к большой оси эллипса колебаний.

747. Естественный свет распространяется в газе, молекулы которого оптически изотропны. Показать, что рассеянный свет можно разложить на линейно-поляризованный свет и на свет естественный. Указать, как будет расположена плоскость поляризации линейно-поляризованной компоненты рассеянного света. Найти отношение интенсивности

линейно-поляризованной компоненты к интенсивности не-поляризованной компоненты рассеянного света в зависимости от угла ϑ между направлениями распространения падающего и рассеянного света.

748. Л. И. Мандельштам и Г. С. Ландсберг, открывшие явление комбинационного рассеяния, производили свои первые опыты по рассеянию на кристаллах кварца. Источником света служила ртутная кварцевая лампа. Исследование велось в ультрафиолетовом свете. Спектр лампы состоял из трех разных волн с длинами 2536, 3126 и 3650 Å. Рассеянный свет фотографировался кварцевым спектрографом. Мандельштам и Ландсберг нашли, что в рассеянном свете все линии ртути сопровождаются спутниками. Для того чтобы доказать, что спутники не являются «ложными», т. е. не получаются в результате случайных отражений всей спектральной картины, надо было убедиться, что длины волн их иные, чем основных линий. Одно из доказательств состояло в том, что между рассеивающим кристаллом и щелью спектрографа помещался кварцевый сосуд, наполненный парами ртути. Опишите, какую картину следовало бы ожидать при подогревании сосуда со ртутью, если бы длины волн спутников были бы такие же, как и основных линий, и какую картину следует ожидать, если предположить, что эти длины волн иные.

749. Найти частоту собственных колебаний v молекулы брома, дающей при комбинационном рассеянии линии $\lambda = 3131,6$ Å спутник с длиной волны $\lambda = 3164,0$ Å.

750. Найти длины волн комбинационных линий молекулы Cl_2 , полученных от возбуждающей линии с $\lambda = 4358,3$ Å, если частота колебаний молекулы соответствует волновому числу 556 см^{-1} .

П р и м е ч а н и е. Волновое число $N = 1/\lambda$.

751. Расстояние между фиолетовой ($\lambda = 4046,8$ Å) и синей ($\lambda = 4358,3$ Å) линиями ртутного спектра на фотопластинке $a_1 = 8,680$ мм, между синей и голубой ($\lambda = 4916,0$ Å) $a_2 = 9,124$ мм. Рядом с синей расположены четыре комбинационные линии CCl_4 на расстояниях 0,903; 1,300; 1,865; 3,083 мм от нее. Найти нормальные частоты CCl_4 в см^{-1} .

У к а з а н и е. Для определения положения спектральных линий можно пользоваться следующей формулой, связывающей частоты двух спектральных линий с расстоянием между ними $v - v_0 = a / (x - x_0)$.

752. Какую разрешающую способность должна иметь призма, чтобы разрешить комбинационный дублет 1500

и 1530 см^{-1} , полученный от возбуждающей линии с $\lambda = 4358,3 \text{ \AA}$?

753. Найти отношение интенсивностей фиолетовых и красных спутников в комбинационном спектре рассеяния CCl_4 при температуре 27°C , если частоты нормальных колебаний CCl_4 равны $217, 315, 457$ и 774 см^{-1} .

754. На основе классической теории оценить по порядку величины частоту вращения ω_0 молекулы H_2 при температуре $T=300 \text{ K}$. Момент инерции молекулы H_2 порядка $5 \cdot 10^{-40} \text{ г} \cdot \text{см}^2$.

755. Найти расстояния Δv между линиями ротационной структуры комбинационной линии N_2 , если известно, что момент инерции молекулы N_2 равен $I=13,8 \cdot 10^{-40} \text{ г} \cdot \text{см}^2$.

756. Показать на основании классической теории, что полносимметричное нормальное колебание молекулы CO_2 ,



Рис. 68.

изображенное на рис. 68, не дает полосы в инфракрасном спектре абсорбции.

757. Показать на основании классической теории, что частота антисимметричного относительно центра нормального колебания молекулы CO_2 , изображенного на рис. 69, отсутствует в комбинационном спектре рассеяния.



Рис. 69.

758. Показать на основании классической теории, что расстояние в \AA между линиями ротационной структуры комбинационного рассеяния молекулы вдвое больше расстояния между линиями ротационной структуры инфракрасного спектра абсорбции.

759. Изотропная среда обладает слабой оптической неоднородностью, так что ее диэлектрическая проницаемость представляется выражением $\epsilon=\epsilon_0+\delta\epsilon$, где ϵ_0 — среднее значение ϵ , а $\delta\epsilon$ — отклонение от среднего значения. Показать, что в линейном приближении задача о рассеянии света может быть сведена к задаче о распространении света в однородной среде с диэлектрической проницаемо-

стью ϵ_0 , в которой имеются дополнительные источники света в виде колеблющихся диполей, распределенных в среде. Показать, что если представить $\delta\epsilon$ в виде $\delta\epsilon = \sum \delta_i \epsilon_i$, то в том же приближении рассеянное излучение может быть получено простой суперпозицией полей, рассеянных на неоднородностях $\delta_i \epsilon_i$.

760. В среде с малой оптической неоднородностью вида $\delta\epsilon = a e^{-iKr}$ (a и K — постоянные) распространяется плоская световая волна: $E_0 = A e^{i(\omega t - Kr)}$, $H_0 = B e^{i(\omega t - Kr)}$. При каких длинах волн $\lambda = 2\pi/k$ и в каких направлениях будет наблюдаться рассеянное излучение?

761. Считая, что диэлектрическая проницаемость среды ϵ является функцией только ее плотности ρ , найти длины волн рассеянного излучения на тепловых флюктуациях плотности в зависимости от угла ϑ между направлениями падающей и рассеянной волны. Падающая волна — монохроматическая.

762. Тепловые флюктуации давления и удельной энтропии определяются следующими формулами:

$$(\overline{\Delta P^2})_s = -kT (\partial P / \partial V)_s, \quad (\overline{\Delta s^2})_P = k c_P,$$

где c_P — удельная теплоемкость, а k — постоянная Больцмана (см. задачу 402 ч. II этого задачника). Пользуясь этими выражениями, найти отношение интенсивности несмещенной компоненты I_ω к сумме интенсивностей двух смещенных компонент $I_{\omega-\delta\omega} + I_{\omega+\delta\omega}$ при рассеянии света в жидкостях. (См. задачу 761.)

763. Описать качественно тонкую структуру линий рэлеевского рассеяния света в аморфных твердых телах.

764. Какую тонкую структуру линий рэлеевского рассеяния неполяризованного света следует ожидать в кристаллах?

765. Какую тонкую структуру линий рэлеевского рассеяния следует ожидать в жидком гелии-II?

766. При рассеянии света резонансной линии ртутной лампы ($\lambda = 2536,5 \text{ \AA}$) в кристалле алмаза под углом $\vartheta = 90^\circ$ к направлению падающего пучка были найдены две пары смещенных компонент с $\delta\lambda = 0,52 \text{ \AA}$ и $\delta\lambda = 0,32 \text{ \AA}$. (Речь идет о смещении относительно центральной (несмещенной) компоненты.) Определить скорости продольной и поперечной акустических волн в алмазе. Показатель преломления алмаза $n = 2,42$.

767. Имеются два вибратора, один из которых ориентирован вертикально, а другой горизонтально. Середина вер-

тикального вибратора находится на продолжении горизонтального на расстоянии d от середины последнего. На вибраторы перпендикулярно к их направлениям падает плоская волна, распространяющаяся в горизонтальной плоскости и поляризованная по кругу. В каких направлениях в горизонтальной плоскости рассеянные волны линейно-поляризованы?

768. Внешняя поверхность заряженного сферического конденсатора или любого заряженного тела сферической формы колеблется (без нарушения формы поверхности) с некоторой частотой ω_0 . Будут ли при таких колебаниях возбуждаться электромагнитные волны, если конденсатор находится в вакууме? Какого типа волны могут возбуждаться, если конденсатор находится в среде?

769. Рой электронов разлетается в вакууме под влиянием кулоновских сил. Будет ли такой разлет сопровождаться дипольным излучением?

770. Частица с зарядом e , движущаяся с нерелятивистской скоростью v , пересекает перпендикулярную к ней границу раздела вакуум — металл. При этом возникает так называемое переходное излучение. Указать его природу и характерные черты.

771. Рассмотреть качественно переходное излучение при пересечении зарядом границы двух прозрачных сред с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 . Какова поляризация излучения?

772. Заряд равномерно движется в однородной прозрачной среде со скоростью v , меньшей фазовой скорости света в этой среде, так что черенковское излучение не возникает. Будет ли заряд излучать, если показатель преломления всей среды быстро изменить (последнее можно достигнуть, например, изменив давление)?

773. Рассмотреть качественно переходное излучение на границе раздела среды с вакуумом для заряда, движущегося с релятивистской скоростью. В чем различие между случаями, когда заряд влетает из вакуума в среду и из среды в вакуум?

774. Рассмотреть качественно переходное излучение в случае пластинки из прозрачного материала (толщина пластиинки d , показатель преломления n , пластиинка находится в вакууме). При каком условии переходное излучение на обеих сторонах пластиинки можно считать независимым для нерелятивистских и для релятивистских частиц?

775. В среде с проницаемостью ϵ помещен заряд, положение которого зафиксировано (заряд закреплен или отве-

чающая ему масса бесконечна). Пусть под влиянием изменяющегося давления (скажем, в акустической волне) проницаемость ϵ меняется с некоторой частотой ω . Возникает ли при этом электромагнитное излучение?

776. В плазме находится осциллятор, колеблющийся с частотой ω . При какой концентрации N электронов в плазме осциллятор перестает излучать электромагнитные волны?

777. Испускаемые пульсаторами импульсы радиоизлучения принимаются на разных частотах («несущих» частотах, регистрируемых радиоаппаратурой) с запаздыванием, тем большим, чем ниже частота. Этот эффект объясняется влиянием на распространение волн межзвездной плазмы. Найти время запаздывания в зависимости от частоты, средней концентрации межзвездного газа N и расстояния до пульсара L .

778. Пространственной дисперсией диэлектрической проницаемости называют зависимость ϵ от волнового вектора \mathbf{k} рассматриваемого электромагнитного поля (в отсутствие поглощения $k=2\pi/\lambda$, где λ — длина волны в среде); частотной дисперсией ϵ называют зависимость ϵ от частоты ω . В произвольном электромагнитном поле, созданном какими-либо источниками, переменные ω и \mathbf{k} можно считать независимыми. Естественная оптическая активность есть эффект пространственной дисперсии порядка a/λ , где a — характерный размер, по порядку величины равный постоянной решетки или размеру молекул. В средах с центром симметрии естественная оптическая активность отсутствует.

Каков по порядку величины эффект пространственной дисперсии в таких средах (в оптической части спектра)? Могут ли кристаллы кубической системы быть оптически анизотропными, если не пренебречь пространственной дисперсией?

779. При учете пространственной дисперсии частота плазменных волн зависит от волнового числа $k=2\pi/\lambda$. При этом, как следует из решения кинетического уравнения, $\omega^2 = \omega_0^2 + 3 \frac{\kappa T}{m} k^2$, где κ — постоянная Больцмана. Предполагается, что затухание волн мало, и этой формулой можно пользоваться только при условии

$$3 \frac{\kappa T}{m} k^2 \ll \omega_0^2 \equiv \frac{4\pi Ne^2}{m}.$$

Найти фазовую и групповую скорости плазменных волн и отвечающий им показатель преломления.

780. Затухание плазменных волн в изотропной плазме (при отсутствии соударений) есть обратный эффект Вавилова — Черенкова, т. е. черенковское поглощение. Написать условие поглощения и качественно пояснить, когда поглощение будет слабым и когда сильным (если не учитывать возмущения, создаваемого самой волной, то распределение скоростей в плазме совпадает с максвелловским).

781. В настоящее время широко проводится экспериментальное изучение обратного рассеяния коротких радиоволн в ионосфере. Предполагая, что этот эффект определяется рассеянием на свободных электронах, рассчитать частотный спектр рассеянного излучения.

782. Релятивистская заряженная частица, ускоренно движущаяся в вакууме, излучает электромагнитные волны преимущественно в направлении ее скорости в конусе с раствором $\theta \sim mc^2/\mathcal{E} = \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Здесь m — масса покоя частицы и $\mathcal{E} = mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ — ее полная энергия. 1) Каков характер магнитотормозного (синхротронного) излучения ультрарелятивистского электрона ($\mathcal{E}/mc^2 \gg 1$) при его движении в магнитном поле по окружности (т. е. при $v \perp H$)? 2) Каков частотный спектр излучения и где находится его максимум при таком движении?

783. Как изменится картина излучения, если в предыдущей задаче скорость электрона будет составлять с направлением магнитного поля угол $\alpha < \pi/2$ (движение по винтовой линии), но все же $\alpha \gg \theta \sim mc^2/\mathcal{E}$?

784. При формулировке предыдущей задачи фигурировало условие $\alpha \gg \theta$. В чем смысл этого условия и каково будет излучение, если $\alpha \ll \theta$?

785. Как поляризовано магнитотормозное излучение?

786. Сгусток, содержащий N релятивистских электронов, движется в магнитном поле и является источником синхротронного излучения. Какой степени числа N пропорциональна интенсивность излучения при $l \gg \lambda$ и $l \ll \lambda$, где l — характерный размер сгустка, а λ — длина волны рассматриваемого излучения? Как зависит от l и λ интенсивность излучения вперед для плоского (дискообразного) сгустка электронов, если ток, обусловленный наличием сгустка, $j = j_0$ при $-l/2 < x < l/2$ и $j = 0$ при $|x| > l/2$ или $j = j_0 \pi^{-1/2} \exp(-x^2/l^2)$?

787. При когерентном механизме излучения электромагнитных волн интенсивность больше суммы интенсивностей отдельных частиц, образующих излучающую систему. В случае антенного когерентного механизма излучения

увеличение интенсивности обеспечивается за счет соблюдения условия $l \ll \lambda$ (l — размер системы и λ — длина волны; см. предыдущую задачу). Но когерентным механизмом излучения является также мазерный механизм. Нужна ли в этом случае предварительная группировка частиц в пространстве или по скоростям? Какова в этом случае причина усиления излучения по сравнению со случаем некогерентного излучения отдельных частиц?

788. Какова минимальная энергия E_{\min} , регистрируемая газовым черенковским счетчиком, наполненным аргоном под давлением P (при $P=1$ атм показатель преломления аргона $n=1,000281$)?

789. Для необыкновенной волны в одноосном кристалле (показатель преломления $n = \sqrt{\frac{\epsilon_{\perp} \epsilon_{||}}{\epsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \epsilon_{||} \cos^2 \theta}}$,

$\epsilon_{\perp} > 0$, $\epsilon_{||} < 0$) найти условия, при которых могут возникать следующие эффекты: 1) черенковское излучение заряда, движущегося с постоянной скоростью v вдоль оптической оси кристалла; 2а) нормальное доплеровское излучение с частотой ω ; 2б) аномальное доплеровское излучение с частотой ω (в обоих случаях речь идет о частице (осцилляторе), колеблющейся во внешнем поле с частотой Ω и движущейся с постоянной скоростью v вдоль оптической оси кристалла); 3) аномальное доплеровское излучение осциллятора в отсутствие черенковского излучения заряда, движущегося с той же скоростью, что и осциллятор.

790. С помощью оптических квантовых генераторов (лазеров) можно получить настолько интенсивные пучки света, что при распространении их в веществе начинают проявляться нелинейные эффекты. Если, например, тонкий световой пучок от рубинового лазера, генерирующего на волне 6943 Å (напряженность поля $\sim 10^5$ В/см), направить на кристалл кварца, то в свете, выходящем из кристалла, наряду с красной линией будет наблюдаться слабая линия с длиной волны $\lambda=3472$ Å. Объяснить это явление.

791. Два квантовых генератора посыпают на кристалл кварца два мощных пучка света с частотами ν_1 и ν_2 . Каковы частоты света в пучках после их выхода из кристалла?

792. В световом поле большой интенсивности в показателе преломления среды вследствие нелинейных эффектов появляется малая добавка, зависящая от средней величины напряженности электрического поля следующим образом: $n=n_0+n_2E^2$, где n_0 — показатель преломления среды

в слабом поле, n_2 — коэффициент, характеризующий нелинейную поляризуемость. Найти пороговую мощность однородного по интенсивности цилиндрического светового луча, проходящего через рассматриваемую среду, начиная с которой луч вследствие самофокусировки не будет дифракционно расходиться.

§ 12. Тепловое излучение

793. Бесконечно длинный плоскопараллельный слой изотропного вещества толщины l имеет всюду одну и ту же температуру T . Найти интенсивность теплового излучения этого слоя в различных направлениях, пренебрегая отражением излучения на его границах, а также рассеянием излучения внутри слоя. (Отражение на границах слоя практически не будет происходить, если показатель преломления вблизи границ меняется плавно.) Коэффициент поглощения вещества (на единицу длины луча) равен α .

794. Решить предыдущую задачу, учитывая отражение излучения на границах слоя, но пренебрегая его рассеянием.

795. Найти излучение бесконечно толстого слоя вещества, пренебрегая рассеянием внутри слоя. Убедиться, что бесконечно толстый слой любого вещества излучает во всех направлениях как абсолютно черное тело, если только можно пренебречь отражением на его границах и рассеянием излучения внутри слоя.

796. В световой вентиль¹⁾ (см. задачу 717), пропускающий излучение слева направо и не пропускающий в обрат-

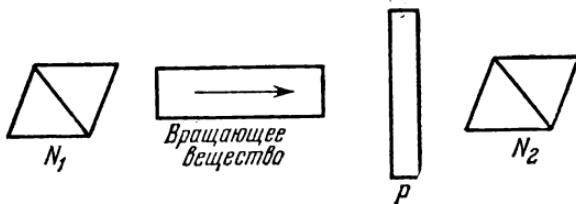


Рис. 70.

ном направлении, введена плоскопараллельная пластинка P (рис. 70) из дихроического кристалла, нагретая до темпе-

¹⁾ Практически такой вентиль представляет интерес для радиодиапазона излучения.

ратуры T . Пластиинка P пропускает целиком лучи одной поляризации и полностью поглощает лучи, поляризованные в перпендикулярной плоскости (отражением света на поверхности пластиинки пренебрегаем). Пластиинка ориентирована так, что она целиком поглощает свет, пропускаемый николем N_2 . Определить интенсивность теплового излучения пластиинки, выходящего из системы слева направо и справа налево.

797. Показать, что если бы не существовало давления лучистой энергии, то можно было бы построить регретиум mobile второго рода.

798. Показать, что цикл Карно, осуществленный с излучением абсолютно черного тела, имеет коэффициент полезного действия $\eta = (T_1 - T_2)/T_1$, где T_1 и T_2 — температуры излучения на изотермических частях цикла ($T_1 > T_2$).

799. Найти энтропию и теплоемкость черного излучения.

800. Тело A находится в равновесии со своим излучением, заключенным в цилиндре с идеально отражающими стенками и закрытым идеально отражающим поршнем B (рис. 71), который может перемещаться в цилиндре без трения. Рассмотрев цикл Карно для такой системы, найти зависимость объемной плотности равновесного излучения u от температуры.

801. Найти уравнение адиабатического процесса, производимого с равновесным излучением.

802. На 1 см^2 земной поверхности падает в среднем около 2 кал лучистой энергии в 1 мин. Расстояние от Земли до Солнца 150 млн. км, диаметр Солнца 1,39 млн. км, температура Солнца 6000 К. Считая Солнце абсолютно черным телом, найти постоянную σ в законе Стефана — Больцмана, связывающем энергию, излучаемую 1 см^2 черного тела (в одну сторону) в 1 секунду с абсолютной температурой.

803. В черный тонкостенный металлический сосуд, имеющий форму куба, налит 1 кг воды, нагретой до 50°C . Определить время t остывания сосуда до 10°C , если он помещен в черную полость, температура стенок которой поддерживается около 0°C , а вода заполняет весь объем сосуда.

804. Определить установившуюся температуру T находящейся в вакууме черной пластины, помещенной перпен-

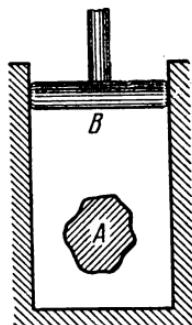


Рис. 71.

дикулярно к солнечным лучам (поток световой энергии 2 кал/(см²·мин)).

805. Найти связь между плотностью энергии и изотропного излучения, его интенсивностью I и светимостью M .

806. Найти число собственных колебаний струны длины z в интервале частот $(v, v+dv)$. Считать, что струна может колебаться лишь в одной плоскости.

807. Найти число собственных колебаний квадратной мембранны со стороной z в интервале частот $(v, v+dv)$.

808. Найти число собственных поперечных колебаний параллелепипеда с объемом V в интервале частот $(v, v+dv)$.

809. По формуле Планка плотность излучения черного тела с частотами в интервале $(v, v+dv)$ равна

$$u_v dv = \frac{8\pi h v^3}{c^3} \frac{1}{\exp\{hv/kT\} - 1} dv.$$

Найти приближенные выражения для u_v , когда $hv \gg kT$ и $hv \ll kT$.

810. Пользуясь формулой Планка (см. предыдущую задачу), определить постоянные в законах Стефана — Больцмана и Вина: $S = \sigma T^4$ и $\lambda_{\max} T = \alpha$, т. е. выразить их через постоянные: h , k и c .

811. Показать, что максимум объемной плотности $u(\lambda, T)$ равновесного теплового излучения, а также максимум излучательной способности $E(\lambda, T)$ абсолютно черного тела растут пропорционально T^5 .

812. Определить температуру T Солнца, принимая его за абсолютно черное тело, если известно, что максимум интенсивности спектра Солнца лежит в зеленой области ($\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см).

813. Определить длину волны, соответствующую максимуму интенсивности в спектре абсолютно черного тела, температура которого равна 10^6 К.

814. Отношение суммарной испускательной способности некоторого тела к испускательной способности черного тела той же температуры равно ϑ_T . Найти связь между истинной и радиационной температурами.

П р и м е ч а н и е. Радиационная температура T_r — температура черного тела, полная испускательная способность которого равна испускательной способности данного тела, имеющего температуру T .

815. Может ли радиационная температура быть больше истинной?

816. Пренебрегая потерями тепла на теплопроводность, подсчитать мощность W электрического тока, необходимую для накаливания нити диаметром 1 мм и длиной 20 см до температуры 3500 К. Считать, что нить излучает, подчиняясь закону Стефана — Больцмана ($\sigma=5,7 \cdot 10^{-5}$ эрг/(с·см²·К⁴)).

817. Для вольфрама при $T=3500$ К $\mathcal{E}_T \approx 0,35$ (см. задачу 815). Найти T , и W для вольфрамовой нити в условиях предыдущей задачи.

818. Под яркостной температурой тела понимают температуру черного тела, при которой последнее имеет яркость, равную яркости данного тела при данной длине волны. Найти, как зависит яркостная температура серого тела от длины волны. (Серым телом называется такое тело, у которого испускательная способность в рассматриваемом участке спектра не зависит от длины волны.)

819. Вином была дана эмпирическая формула для распределения энергии в спектре черного тела; она имеет вид

$$E(\lambda, T) = C_1 \lambda^{-5} \exp\left\{-\frac{C_2}{\lambda T}\right\},$$

где C_1 и C_2 — постоянные. Получить из этой формулы закон смещения Вина и, взяв для C_2 принятое сейчас значение 1,43880 см·К, определить постоянную для закона смещения Вина.

820. Сравнивая формулу Вина с формулой Планка, показать, до какой температуры в пределах видимого спектра ($7500 \text{ \AA} < \lambda < 4000 \text{ \AA}$) можно пользоваться формулой Вина, чтобы ошибка не превышала 1%.

821. Определить световое давление в центре атомной (урановой) бомбы в момент ее взрыва, предполагая, что излучение — равновесное, температура внутри бомбы $T \approx 10$ кэВ, плотность вещества $\rho \approx 20$ г/см³. (Результат ср. с ответом к задаче 364 ч. II этого задачника.)

822. Какая формула для плотности излучения μ_v черного тела получилась бы, если бы не было индуцированного испускания света?

Указание. См. вывод формулы Планка по Эйнштейну (Г. С. Ландсберг, Оптика, «Наука», 1976).

823. Газ состоит из молекул или атомов, имеющих два невырожденных уровня энергии E_1 и E_2 ($E_1 < E_2$). Газ находится в состоянии термодинамического равновесия. Учитывая индуцированное испускание, выразить коэффициент поглощения газа $\kappa(T)$ при температуре T через его зна-

чение κ_0 при $T=0$. Рассмотреть два предельных случая:

1) $kT \gg h\nu = E_2 - E_1$; 2) $kT \ll h\nu = E_2 - E_1$.

824. Определить в области применимости закона Рэлея—Джинса эффективную температуру излучения бесконечно длинного плоскопараллельного слоя изотропного вещества толщины l и температуры T , пренебрегая отражением излучения на границах слоя, а также рассеянием излучения внутри слоев. Ограничиться рассмотрением излучения в нормальном к слою направлении. Коэффициент поглощения вещества (на единицу длины луча) равен α .

825. Источником радиоизлучения Солнца в метровом диапазоне является корона. Определить поток радиоизлучения S от Солнца на Земле в полосе шириной 1 МГц, предполагая, что это излучение является тепловым. Эффективная температура излучения короны $T \approx 10^6$ К.

826. Среда состоит из частиц, которые могут находиться на двух энергетических уровнях с энергиями E_1 и $E_2 > E_1$. Концентрации частиц на уровнях 1 и 2 равны соответственно N_1 и N_2 . На систему падает электромагнитная волна с частотой $\nu = (E_2 - E_1)/h$. По какому закону будет изменяться ее интенсивность I ? Возможно ли усиление волны и при каких условиях?

827. Лазер на рубине излучает в импульсе длительностью $\tau = 0,5$ мс энергию $\mathcal{E} = 10$ Дж в виде почти параллельного светового пучка. Рабочая длина волны лазера $\lambda = 6943$ Å, ширина линии $\Delta\lambda = 0,01$ Å. Определить по спектральной плотности излучаемой энергии эффективную температуру $T_{\text{эфф}}$ в лазерном пучке.

828. Энтропия монохроматического излучения равна нулю. Пользуясь этим, показать, что для линейчатого спектра справедлив первый закон Вавилова спектрального преобразования света при люминесценции. Согласно этому закону величина энергетического выхода ρ , равная отношению интенсивности излучения люминесценции I_e к интенсивности поглощенного света I_a , не превосходит единицы: $\rho \equiv I_e/I_a \leq 1$.

829. Найти характер зависимости величины энергетического выхода люминесценции ρ (см. задачу 828) от длины волны возбуждающего света λ' в области частот, где вероятность $w(\nu, \nu')$ испускания телом кванта с частотой ν в результате поглощения кванта с частотой ν' не зависит от частоты последнего, т. е. в области, где $w(\nu, \nu') \equiv w(\nu)$.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

§ 1. Геометрическая оптика

1. Расстояние $x = \frac{2rl}{r_1 + r_2 - 2r}$, радиус источника $y = \frac{r(r_2 - r_1)}{r_1 + r_2 - 2r}$.

2. Полное затмение бывает в том случае, когда расстояние от центра Луны до поверхности Земли меньше 376 000 км; кольцеобразное, когда оно больше этой величины.

4. Если экран помещен близко от зеркала, то освещенная часть имеет форму четырехугольника. Если же экран находится далеко от зеркала, то получается изображение Солнца в виде эллипса.

5. На экране получится система горизонтальных светлых и темных полос. При повороте щели на 90° полосы становятся вертикальными. При ее повороте на 45° в случае решетки, изображенной на рис. 1, а, полосы пропадут; в случае решетки, показанной на рис. 1, б, появятся полосы, образующие с горизонтом угол 45° . В последнем случае расстояние между полосами станет в $\sqrt{2}$ раз меньше расстояния между горизонтальными (или вертикальными) полосами. Во всех случаях полосы параллельны щели.

6. Характер картины не изменится, но полосы сделаются немного уже.

7. $\delta = 2\alpha$. Эта формула охватывает всевозможные случаи, если при отсчете углов α и δ придерживаться следующего правила. Пусть свет отражается сначала от первого зеркала, а затем от второго. Тогда под α надо понимать угол, на который следует повернуть первое зеркало, чтобы совместить его со вторым зеркалом. Аналогично, δ определяется как угол, на который надо повернуть исходное направление луча, чтобы совместить его с направлением луча, отраженного от второго зеркала. Направления вращений произвольны, но в обоих случаях должны быть одинаковы (например, по или против часовой стрелки). Это замечание надо иметь в виду при решении всех задач, аналогичных разбираемой.

$$8. \quad r_1 = r_0 - 2(r_0 N)N,$$

$$n_2 r_2 = n_1 r_0 - N \left\{ n_1 (r_0 N) + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 + n_1^2 (r_0 N)^2} \right\}.$$

9. Пусть N_1 , N_2 , N_3 —единичные векторы нормалей к плоскостям зеркал; r_0 —единичный вектор падающего на первое зеркало луча; r_1 , r_2 , r_3 —единичные векторы луча после отражения от первого, второго и третьего зеркал. Тогда

$$\begin{aligned}r_1 &= r_0 - 2(r_0 N_1) N_1, \\r_2 &= r_1 - 2(r_1 N_2) N_2, \\r_3 &= r_2 - 2(r_2 N_3) N_3.\end{aligned}$$

Отсюда легко получить, что $r_3 = -r_0$.

12. Решение. Положение (точечного) объекта O можно задать углом α , который радиус-вектор CO образует с поверхностью зер-

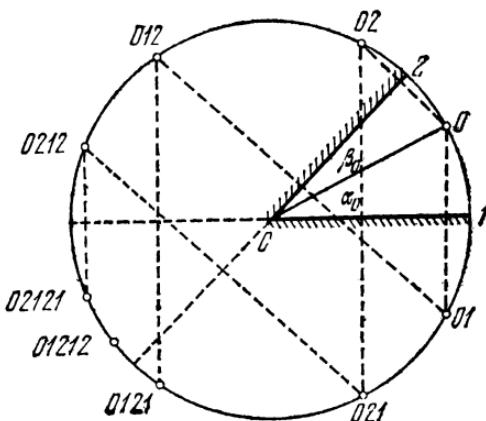


Рис. 72.

кала 1, или углом β , который тот же радиус-вектор образует с поверхностью зеркала 2 (рис. 72). Пусть α_0 и β_0 характеризуют положение объекта O . Легко видеть, что для изображений 02 , 012 , 0212 , 01212 , ..., угол α имеет следующий ряд значений:

$$\alpha = 2\varphi - \alpha_0, \quad 2\varphi + \alpha_0, \quad 4\varphi - \alpha_0, \quad 4\varphi + \alpha_0, \dots$$

Этот ряд обрывается на изображении, которое первым оказывается со стороны задней поверхности зеркала 1, так как в этом случае лучи от этого изображения уже не смогут отразиться от зеркала 1. Аналогично, положения изображений 01 , 021 , 0121 , 02121 , ... определяются углами

$$\beta = 2\varphi - \beta_0, \quad 2\varphi + \beta_0, \quad 4\varphi - \beta_0, \quad 4\varphi + \beta_0, \dots$$

причем ряд обрывается на изображении, которое впервые оказывается со стороны задней поверхности зеркала 2. Дальнейший ход решения поясним на двух примерах.

Пример 1. $m=5$ ($\phi=2\pi/5$ рад = 72°), $\alpha_0=22^\circ$ ($\beta_0=50^\circ$). Для верхнего ряда изображений получаем $\alpha=122, 166, 266^\circ$; для нижнего $\beta=94, 194^\circ$. Углы α и β связаны соотношением $\alpha=2\pi+\phi-\beta$, или в рассматриваемом случае $\alpha=432^\circ-\beta$. С помощью этого соотношения находим для нижнего ряда $\alpha=338, 238^\circ$. Следовательно, в верхнем и нижнем рядах нет совпадающих изображений. Всего изображений — пять.

Пример 2. $m=6$ ($\phi=60^\circ$), $\alpha_0=20^\circ$ ($\beta_0=40^\circ$). Для верхнего ряда изображений $\alpha=100, 140, 220^\circ$; для нижнего $\beta=80, 160, 200^\circ$ ($\alpha=220^\circ$). Последние изображения в этих рядах совпадают, так что получается всего пять изображений.

Вообще, если m — нечетное, то число изображений равно m . Если же m — четное, то число изображений равно $m-1$. Изложенный метод пригоден и для случая, когда m не есть целое число.

13. Если лучи по выходе из призмы собираются ахроматической линзой, то спектрального разложения не будет. Если же выходящие лучи непосредственно падают на экран, то получится белое пятно с окрашенными краями; $\delta=2\alpha$.

15. Диаметр изображения приблизительно равен 7,5 см.

16. Изображение действительное и увеличенное в два раза, когда объект находится на расстоянии 30 см от зеркала. Изображение мнимое и увеличенное в два раза, когда объект находится на расстоянии 10 см от зеркала.

17. $f=7,5$ см.

19. Выпуклая поверхность параболоида вращения, ось которого параллельна лучам.

20. $f=g/2\omega^2=490$ см.

21. Решение. Из законов отражения света следует, что продолжение отраженного луча CB (рис. 73) пересечет перпендикуляр AA' к плоскости зеркала в точке A' , отстоящей от этой плоскости на таком же расстоянии, что и точка A . Значит, $A'C=AC$, а длина светового пути ACB равна длине прямой $A'B$. Если бы свет распространялся по пути $AC'B$, то длина этого пути равнялась бы длине ломаной $A'C'B$. Сравнение длины ломаной $A'C'B$ с длиной прямой $A'CB$ дает решение задачи.

22. Из равенства углов падения и отражения на основании свойства биссектрисы угла треугольника заключаем, что в приближении параксиальной оптики положения точки-объекта P и ее изображения P' в сферическом зеркале связаны соотношением

$$OP/OP'=CP/P'C,$$

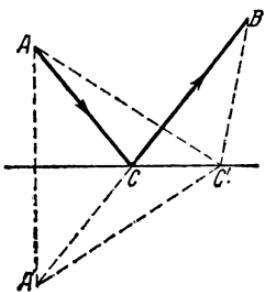


Рис. 73.

т. е. точки P , P' , C , O являются четырьмя гармоническими точками. Тем самым построение, указанное в тексте задачи, сводится к известной теореме проективной геометрии о полном четырехугольнике.

23. Решение. Не нарушая общности, можно считать, что показатель преломления первой среды равен единице. Для оптической длины L ломаной, соединяющей точки A и B (рис. 74), имеем

$$L = \frac{a}{\cos \varphi} + \frac{nb}{\cos \psi}.$$

При этом должно выполняться дополнительное соотношение

$$a \operatorname{tg} \varphi + b \operatorname{tg} \psi = \text{const},$$

которое выражает постоянство длины проекции ломаной ACB на плоскость раздела сред. Для минимума необходимо

$$\frac{dL}{d\varphi} = \frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} + \frac{nb \sin \psi}{\cos^2 \psi} \frac{d\psi}{d\varphi} = 0.$$

Из дополнительного условия следует

$$\frac{a}{\cos^2 \varphi} + \frac{b}{\cos^2 \psi} \frac{d\psi}{d\varphi} = 0.$$

Сопоставляя это соотношение с предыдущим, находим

$$\sin \varphi - n \sin \psi = 0,$$

т. е. закон преломления света. В том, что этот закон действительно выражает условие минимума оптической длины пути светового луча,

а не просто условие ее экстремума, можно убедиться, либо исследуя знак второй производной $d^2L/d\varphi^2$, либо непосредственно из геометрических соображений.

24. Решение. Для примера выведем формулу тонкой линзы. Пусть P — точечный источник света, расположенный на главной оптической оси линзы, а P' — его изображение (рис. 75). Согласно принципу тautoхронизма оптические длины всех лучей, вышедших

из P и собравшихся в P' , одинаковы. Опишем из P и P' как из центров, окружности с радиусами PA и $P'B$ соответственно. Тогда на основании равенства оптических длин лучей можем написать

$$(CED) = (AB),$$

где круглые скобки означают оптические длины лучей, заключенных в эти скобки. Если лучи PE и EP' параксиальные, то можно принять, что длина ломаной CED приближенно равна длине ее проекции

MN на главную оптическую ось. В этом приближении предыдущее соотношение можно записать в виде

$$MN = nAB \text{ или } AM + BN = (n-1)(AL + LB), \quad (24.1)$$

где L — проекция точки E на главную оптическую ось. Для тонкой линзы приближенно:

$$AL = (EL)^2/2R_1, \quad LB = -(EL)^2/2R_2,$$

где R_1 и R_2 — радиусы кривизны сферических поверхностей линзы.

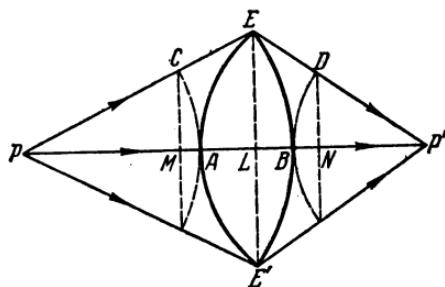


Рис. 75.

Аналогично, при выполнении условия параксиальности справедливы выражения

$$AM = -(EL)^2/2x_1, \quad BN = (EL)^2/2x_2,$$

где через x_1 и x_2 обозначены соответственно длины PA и BP' . Подставляя написанные выражения в формулу (24.1), получим

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

25. $\varphi = \operatorname{arctg} n$.

27. Боковое смещение $l = d \sin(\varphi - \psi)/\cos \psi = 6,6$ см.

28. $h' = \frac{h}{n} \frac{\cos^3 \varphi}{\cos^3 \psi} = 0,215$ м.

29. $l = d/n = 10$ см.

30. $n = 1,5$.

31. $l_2 = l_1 + d/n = 18$ см.

32. Фокус отодвинется на $d(n-1)/n = 2$ мм.

35. $n = \frac{\sin \{(A+\delta)/2\}}{\sin \{A/2\}}$.

36. $\delta = 48^\circ 12'$.

38. $n = \sqrt{2} = 1,41$.

39. $\sin(\alpha/2) \geq 1/n = 0,752$; $\alpha \geq 97^\circ 30'$.

41. $\delta = A(n-1) \left\{ 1 + \frac{n(n+1)}{24} A^2 \right\}$.

$$42. D = \frac{d\delta}{d\lambda} = 2 \frac{\sin \psi}{\cos \varphi} \frac{dn}{d\lambda} = 2 \frac{\sin(A/2)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(A/2)}} \frac{dn}{d\lambda},$$

$$\Delta\delta = 2 \frac{\sin(A/2)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(A/2)}} \Delta n = 5'12''.$$

43. Интервалы

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

Угловая дисперсия (в угл. с/Å) 0,9 1,7 2,9 8 13 36.

44. Линейная дисперсия (в мм/Å): 0,0022; 0,0042; 0,0071; 0,0195; 0,032; 0,088.

45. Желтый луч пройдет без отклонения, синий отклонится к вершине призмы, красный — к основанию призмы.

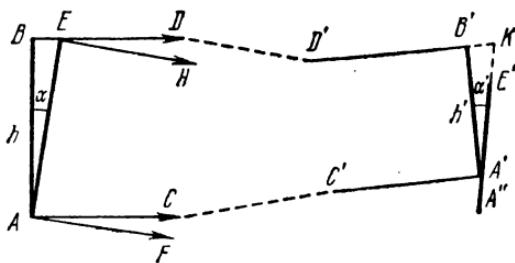


Рис. 76.

46. Решение. Пусть AB — плоский участок волнового фронта перед трубой (рис. 76.). После прохождения через трубу (не изображенную на рисунке) он переходит в плоский участок $A'B'$. Луч $C'A'$ будет продолжением луча AC , а луч $D'B'$ — продолжением луча BD . Тогда $(ACC'A') = (BDD'B')$, где круглые скобки означают оптические длины лучей, заключенных в эти скобки. Возьмем другой плоский участок волнового фронта AE , наклоненный к AB под бесконечно малым углом α . За трубой волновой фронт AE перейдет в волновой фронт $A'E'$, образующий с прежним волновым фронтом $A'B'$ угол α' . Угловое увеличение трубы будет $N = \alpha'/\alpha$. Возьмем тот волновой фронт $A'E'$, который проходит через точку A' . Лучи перпендикулярны к соответствующим волновым фронтам. Отсюда следует, что оптические длины лучей AA'' и EE' при смещении вдоль волнового фронта будут меняться во втором или высшем порядке малости относительно этих смещений. С точностью до второго порядка они остаются неизменными. Следовательно, с такой степенью точности $(ACC'A') = (EDD'B'K)$. Сравнивая это соотношение с предыдущим, получим $(BEDD'B') = (EDD'B'K)$, откуда $(BE) = (B'K)$, или $nha = n'h'\alpha'$, где n — показатель преломления среды перед трубой, n' — за трубой, h — поперечное сечение падающего пучка лучей, a h' — выходящего. В трубе $n = n'$, а следовательно, $N = \alpha'/\alpha = h/h'$. Полученные

результаты справедливы для любых телескопических систем, т. е. таких систем, после прохождения через которые любой параллельный пучок лучей остается параллельным.

47. Надо держать призму так, чтобы лучи при прохождении через нее испытывали наименьшее отклонение.

Решение. Увеличение, даваемое призмой, вообще говоря, различно в разных направлениях. В направлении, параллельном преломляющему ребру призмы, оно равно единице, так как поперечные размеры параллельного светового пучка после прохождения через призму в этом направлении не изменяются (см. решение предыдущей задачи). Напротив, в направлении, перпендикулярном к преломляющему ребру, поперечные размеры, вообще говоря, претерпевают изменения. В этом направлении увеличение может быть как больше, так и меньше единицы. Этим и объясняется сплюснутая или вытянутая форма изображения. Только при симметричном ходе пучка через призму его поперечные размеры остаются неизменными во всех направлениях. В этом случае увеличение равно единице и не зависит от направления.

48. Надо расположить призмы взаимно перпендикулярно, поворачивая их вокруг направления ребер таким образом, чтобы увеличения в двух взаимно перпендикулярных направлениях были одинаковы.

50. Изображение вначале находится на расстоянии $l = D/(2-n) = 15$ см от ближнего конца диаметра с той же стороны, что и крупинка. При перемещении крупинки вдоль диаметра ее изображение перемещается в том же направлении и сливаются с самой крупинкой, когда последняя достигает ближнего конца диаметра.

51. Сначала получается мнимое прямое уменьшенное изображение при отражении от роговицы глаза, которая действует как выпуклое зеркало. Оно дает другое изображение при отражении от вогнутых поверхностей очковых стекол, которое мы и видим.

52. Может. Изображения обратные. $d = n(R_1 + R_2)/(n - 1)$; $N = R_1/R_2$.

53. Передняя поверхность линзы должна быть выпуклой, а задняя вогнутой, причем $R_1 > R_2$; $d = n(R_1 - R_2)/(n - 1)$; $N = R_1/R_2$.

54. $D \approx 2$ см.

55. $f = 30,8$ мм.

56. $f' = 40$ см.

57. Фокусное расстояние увеличится в 8,64 раза, причем собирающая линза станет рассеивающей и наоборот.

58. $f = 9$ см.

59. Фокусное расстояние объектива в воде должно быть 48 см, а в воздухе 12 см. Увеличение трехкратное.

60. $f'_1 = 36$ см; $f'_2 = 4$ см; $f_1 = 45$ см; $f_2 = 5$ см.

61. $\Delta l = 0,5$ см.
 62. Роговица глаза должна быть плоской.
 63. $f = 20$ см (линза собирающая).
 64. Система телескопическая.
 65. Изображение получается на 5 см правее крайней правой линзы системы.

66. $l_1 = f_1 + \frac{(f_2 + l_2) f_1^2}{(d - f_1)(f_2 + l_2) - f_2 l_2} = 0,0613$ см,
 $\alpha = \frac{f_1 d}{d(l_1 - f_1) - l_1 f_1} = 150.$

69. $h = \sqrt{ab}.$

70. $f = \frac{L^2 - l^2}{4L} = 12$ см.

71. $l > \frac{100 + p}{p} f.$

72. $f = -2$ м.

73. $f = 1,5$ м.

74. $R = 72$ см, $l = 108$ см.

75. Собирающую линзу с фокусным расстоянием 30 см.

76. Оптическую длину луча следует считать положительной в направлении распространения света и отрицательной в обратном направлении. Поэтому оптические длины всех лучей, соединяющих источник P с его изображением P' в плоском зеркале, равны нулю.

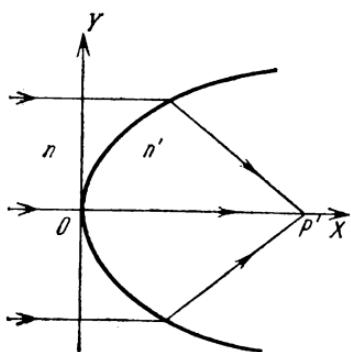


Рис. 77.

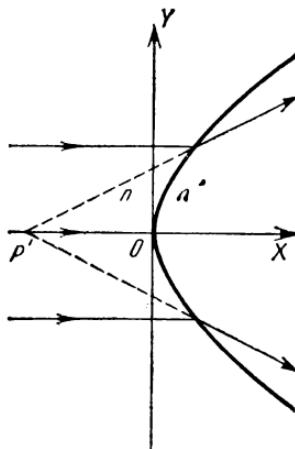


Рис. 78.

77. Примем ось вращения за ось X , а точку пересечения ее с искомой поверхностью за начало координат. Тогда уравнение ана-

беррационной поверхности будет

$$(n'^2 - n^2) x^2 + n'^2 (y^2 + z^2) - 2n' (n' - n) qx = 0,$$

где q — абсцисса точки P' .

При $n'^2 > n^2$ получается эллипсоид вращения (рис. 77), вытянутый вдоль X , с полуосами

$$a = \frac{n'}{n' + n} q, \quad b = q \sqrt{\frac{n' - n}{n' + n}}$$

и эксцентриситетом

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \frac{n}{n'} < 1.$$

При $n'^2 < n^2$ получается двуполостный гиперболоид вращения (рис. 78) с полуосами

$$a = \frac{n'}{n' + n} q, \quad b = q \sqrt{\frac{n - n'}{n' + n}}$$

и эксцентриситетом

$$e = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \frac{n}{n'} > 1.$$

В этом случае изображение P' мнимое.

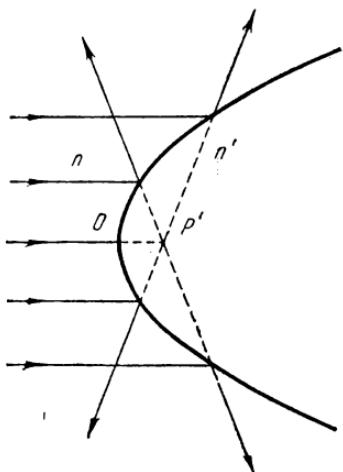


Рис. 78.

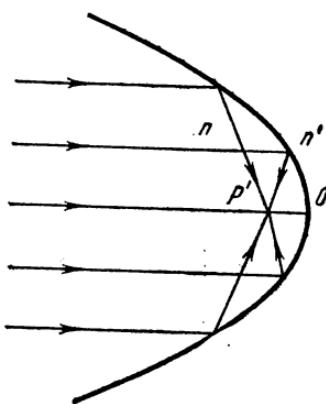


Рис. 77.

Случай $n'^2 - n^2 = 0$ может осуществляться либо при $n' = n$, что не интересно, либо при $n' + n = 0$. Вторая возможность соответствует отражению света. В этом случае анаберрационная поверхность

$$y^2 + z^2 = 4qx$$

есть параболоид вращения с параметром $p=2q$ (параболоидальное зеркало). При $q > 0$ изображение P' мнимое (рис. 79), при $q < 0$ — действительное (рис. 80).

78. Решение. Для примера рассмотрим случай 1). Случай 2) может быть рассмотрен аналогично.

Проведем произвольную прямую CD , параллельную большой оси эллипса AB (рис. 81). Точку пересечения ее D с эллипсом соединим с фокусами F_1 и F_2 . Если DN — нормаль к эллипсу, то $\angle F_1DN = \angle F_2DN$. Далее, $\angle DNF_2 = \varphi$. Поэтому из треугольников F_1DN и F_2DN по теореме синусов находим

$$\frac{F_1D}{F_1N} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}, \quad \frac{F_2D}{F_2N} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}.$$

Отсюда

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{F_1D + F_2D}{F_1N + NF_2} = \frac{AB}{F_1F_2}.$$

Теперь очевидно, что если показатель преломления эллипсоида относительно окружающей среды $n = AB/F_1F_2 = 1/e$ и если падающий луч направить по CD , то преломленный луч пойдет по DF_1 .

81. Решение. Направим ось X вдоль прямой PP' , а ось Y перпендикулярно к ней. Поместим начало координат в точке пересечения картезианского овала с осью X . Обозначим через q и q'

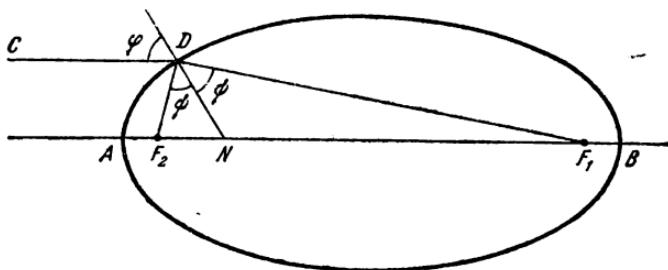


Рис. 81.

абсциссы точек P и P' . Картезианский овал является анаберрационной поверхностью относительно пары точек P, P' , а следовательно, уравнение его сечения плоскостью XY будет

$$n \sqrt{(x-q)^2 + y^2} + n' \sqrt{(x-q')^2 + y^2} = n'q' - nq,$$

или (после освобождения от радикалов)

$$(n^2 - n'^2)(x^2 + y^2) + 4(n^2 - n'^2)(n'^2 q' - n^2 q)(x^2 + y^2)x + \\ + 4nn'(nq - n'q')(nq' - n'q)(x^2 + y^2) + 4(n'^2 q' - n^2 q)x^2 + \\ + 8nn'(n' - n)(nq - n'q')qq'x = 0. \quad (81.1)$$

Если $n^2 - n'^2 = 0$, то это уравнение переходит в уравнение второго порядка. Это может быть либо при $n - n' = 0$, что не интересно, либо при $n + n' = 0$. Во втором случае (81.1) переходит в

$$4qq'x^2 + (q + q')y^2 - 4qq'(q + q')x = 0. \quad (81.2)$$

Если ввести новые прямоугольные координаты ξ и η , поместив начало координат в середине отрезка PP' , то

$$x = \xi + \frac{q + q'}{2}, \quad y = \eta,$$

и уравнение кривой (81.2) примет вид

$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{q + q'}{2}\right)^2} + \frac{\eta^2}{qq'} = 1. \quad (81.3)$$

При $qq' > 0$ (81.3) есть уравнение эллипса, фокусами которого являются сопряженные точки P и P' (эллипсоидальное зеркало). При $qq' < 0$ (81.3) есть уравнение гиперболы с фокусами в P и P' (гиперболоидальное зеркало).

Уравнение (81.1) переходит в уравнение второго порядка также в том случае, когда одна из точек P или P' удалена в бесконечность. Если, например, $q = \infty$, то, сохраняя в (81.1) только старшие члены по q и сокращая на $4q^2n^2$, получим

$$(n'^2 - n^2)x^2 + n'^2y^2 - 2n'(n - n')q'x = 0. \quad (81.4)$$

Этот случай рассматривался в задаче 76.

При $qn = q'n'$ формула (81.1) приводится к виду

$$[(n + n')(x^2 + y^2) - 2qnx]^2 = 0$$

и представляет собой уравнение двух совпадающих окружностей. Уравнение одной окружности:

$$(n + n')(x^2 + y^2) - 2qnx = 0. \quad (81.5)$$

Анаберрационная поверхность в этом случае есть сфера радиуса

$$R = \frac{qn}{n + n'} = \frac{q'n'}{n + n'} \quad (81.6)$$

(см. следующую задачу).

Есть еще один (тривиальный) случай, когда (81.1) должно сводиться к уравнению второго порядка. Если $q = q'$, то обе сопряженные точки P и P' совпадают, т. е. на анаберрационной поверхности световые лучи не должны преломляться. Значит, в этом случае при $n \neq n'$ картезианский овал должен вырождаться в сферу или в совокупность двух концентрических сфер. Это требование может служить критерием правильности вычислений. Полагая в (81.1) $q = q'$, находим

$$(x^2 + y^2 - 2qx)[(n + n')^2(x^2 + y^2 - 2qx) + 4nn'q^2] = 0,$$

что является уравнением совокупности двух концентрических сфер с центрами в точке P .

83. Если P и Q — апланатические точки сферической поверхности KL , то они же будут апланатическими точками линзы, ограниченной поверхностью KL и сферой MN , имеющей центром точку P (рис. 82).

$$84. f = \frac{R_1 R_2}{2(n-1)R_2 + 2nR_1}.$$

$$85. \frac{f_1}{f_2} = \frac{n}{n-1}.$$

86. Выпуклый мениск. $R_1 = 20$ см, $R_2 = 10$ см, $n = 1,53$. Объект помещается со стороны вогнутой поверхности мениска.

87.

$$x' = \frac{n'Rx}{(n'-n)x+nR}, \quad y' = \frac{nRy}{(n'-n)x+nR}, \quad z' = \frac{nRz}{(n'-n)x+nR}.$$

88. Решение. Разрешив уравнения

$$x' = \frac{Ax+B}{ax+b}, \quad y' = \frac{Cy}{ax+b}, \quad z' = \frac{Cz}{ax+b} \quad (89.1)$$

относительно x и y , получим

$$x = \frac{A'x' + B'}{a'x' + b'}, \quad y = \frac{C'y'}{a'x' + b'}, \quad z = \frac{C'z'}{a'x' + b'}, \quad (89.2)$$

где

$$A' = -b, \quad B' = B, \quad a' = a, \quad b' = -A, \quad C' = \frac{aB - Ab}{C}. \quad (89.3)$$

Если $ax + b = 0$, то x' , y' , z' становятся, вообще говоря, бесконечными. Это значит, что лучи, вышедшие из какой-либо точки

плоскости $ax + b = 0$, после прохождения через оптическую систему становятся параллельными. Плоскость $ax + b = 0$ называется фокальной плоскостью пространства предметов. Плоскость $a'x' + b' = 0$ называется фокальной плоскостью пространства изображений; параллельный пучок лучей, падающий на систему, сходится в одной из точек этой плоскости. Точки пересечения F и F' фокальных плоскостей

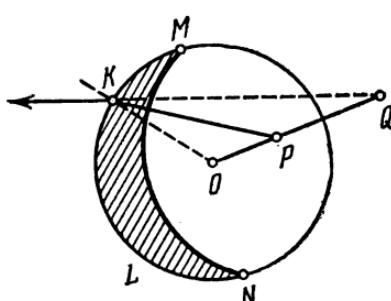


Рис. 82.

стей с главной оптической осью называются фокальными точками или главными фокусами системы. Для координат этих точек имеем

$$x_F = -\frac{b}{a}, \quad x'_F = -\frac{b'}{a'} = \frac{A}{a}. \quad (89.4)$$

Сопряженные плоскости, координаты сопряженных точек которых связаны соотношениями $y' = y$, $z' = z$, называются главными плоскостями оптической системы. Они отображаются друг в друга с поперечным увеличением $+1$. Точки пересечения главных плоскостей с главной оптической осью H и H' называются главными точками системы. Их координаты:

$$x_H = \frac{C-b}{a}, \quad x'_H = \frac{C'-b'}{a'} = \frac{aB + A(C-b)}{Ca}. \quad (89.5)$$

Расстояния главных точек от соответствующих главных фокусов называются фокусными расстояниями системы. Для фокусных расстояний имеем

$$f = x_H - x_F = \frac{C}{a}, \quad f' = x'_H - x'_F = \frac{C'}{a'} = \frac{aB - Ab}{Ca}. \quad (89.6)$$

Узловые точки K и K' определяются как сопряженные точки, обладающие следующим свойством: световой луч, проходящий через K под некоторым углом к оптической оси, проходит через K' под тем же углом и в том же направлении. Это значит, что уравнение луча $y = \alpha(x - x_K)$ переходит в $y' = \alpha(x' - x'_{K'})$, т. е. $\frac{y'}{y} = \frac{x' - x'_{K'}}{x - x_K}$.

Пользуясь формулами (89.1) и имея в виду, что последнее уравнение должно соблюдаться при любом x , нетрудно получить

$$x_K = x_F - f', \quad x'_{K'} = x'_F - f. \quad (89.7)$$

90. В случае 1) надо положить $x_H = x'_H = 0$, а в случае 2) $x_F = x'_F = 0$. Отсюда после преобразования координат получим

$$\frac{f}{\xi} + \frac{f'}{\xi'} = -1, \quad \frac{\eta'}{\eta} = \frac{f}{f+\xi} = \frac{f'+\xi'}{f'} = -\frac{f\xi'}{f'\xi}, \quad (90.1)$$

$$XX' = ff', \quad \frac{Y'}{Y} = \frac{f}{X} = \frac{X'}{f'}. \quad (90.2)$$

91. Главные плоскости совпадают между собой и касаются преломляющей поверхности в точке пересечения ее с главной оптической осью; $f = \frac{nR}{n'-n}$, $f' = -\frac{n'R}{n'-n}$.

94. Решение. Поместим начала координат каждой из складываемых систем в фокальные точки. Пусть X_1, Y_1 — координаты точки-объекта, а X'_1, Y'_1 — ее изображения в первой системе. Тогда

$$X_1 X'_1 = f_1 f'_1, \quad Y'_1 / Y_1 = f_1 / X_1.$$

Примем изображение, даваемое первой системой, за объект во второй системе. Координаты такого «объекта» будут

$$X_2 = X'_1 - \delta, \quad Y_2 = Y'_1.$$

Координаты его изображения, даваемого второй системой (относительно F'_2), обозначим через X'_2 , Y'_2 . Тогда

$$X_2 X'_2 = f_2 f'_2, \quad Y'_2 / Y_2 = X'_2 / f'_2.$$

Исключая координаты промежуточного изображения, получим

$$X'_2 = \frac{f_2 f'_2}{f_1 f'_1 - \delta X_1} X_1, \quad Y'_2 = \frac{f_1 f_2}{f_1 f'_1 - \delta X_1} Y_1.$$

Отсюда известным способом (см. задачу 88) находим координаты фокальных и главных точек сложной системы:

$$x_F = \frac{f_1 f'_1}{\delta}, \quad x'_{F'} = -\frac{f_2 f'_2}{\delta}, \quad (94.1)$$

$$x_H = \frac{f_1 f'_1 - f_1 f_2}{\delta}, \quad x'_{H'} = \frac{f'_1 f'_2 - f_2 f'_2}{\delta}, \quad (94.2)$$

причем за начало координат в пространстве предметов принят передний фокус первой системы, а в пространстве изображений — задний фокус второй системы. Для фокусных расстояний сложной системы находим

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\delta}, \quad f' = \frac{f'_1 f'_2}{\delta}. \quad (94.3)$$

95.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{l}{f_1 f_2}, \quad f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - l}. \quad (95.1)$$

Расстояния главных плоскостей H и H' системы от первой и второй линз равны

$$O_1 H = -\frac{f_1 l}{l - f_1 - f_2}, \quad O_2 H' = \frac{f_2 l}{l - f_1 - f_2}. \quad (95.2)$$

96. «Эквивалентную» линзу следует поместить в передней главной плоскости системы двух линз: $f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - l}$.

97. $f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - l/n}$, где n — показатель преломления воды.

98.

$$f = -n_1 n_2 R_1 R_2 / D, \quad f' = n_2 n_3 R_1 R_2 / D.$$

Здесь

$$D = d (n_2 - n_1) (n_3 - n_2) + n_2 [R_1 (n_2 - n_3) + R_2 (n_1 - n_2)],$$

где $d = O O'$ (рис. 83) — толщина линзы. Приняв O и O' за начала координат, для координат главных точек H и H' будем иметь

$$h = OH = -n_1 (n_3 - n_2) \frac{R_1 d}{D}, \quad h' = O' H' = n_3 (n_2 - n_1) \frac{R_2 d}{D},$$

99. Обе главные плоскости совпадают и проходят через центр шара. 1) $f = -f' = \frac{R}{2} \frac{n}{n-1} = 2R$; фокальные точки лежат снаружи шара на расстоянии R от его поверхности. 2) $f = 1,5R$; фокальные точки лежат снаружи шара на расстоянии $R/2$ от его поверхности. Фокальные точки не выходят наружу при $n \geq 2$.

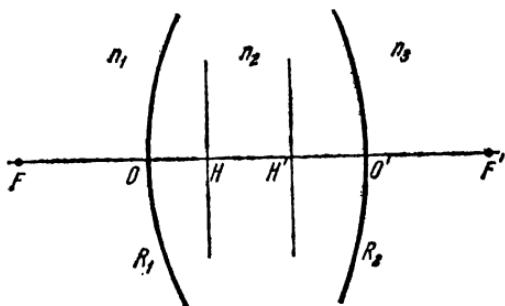


Рис. 83.

100. 1) $x' = 15$ см. 2) Увеличение $\frac{y'}{y} = 1,5$.

101. Для плоско-выпуклой и плоско-вогнутой линз, т. е. когда R_1 или $R_2 = \pm \infty$. Если свет падает со стороны сферической поверхности, то положение фокуса в пространстве изображений относительно линзы зависит от толщины последней; если со стороны плоской, то не зависит.

102. Когда толщина линзы $d > \frac{n}{n-1} (R_1 + R_2) = 3(R_1 + R_2)$, где R_1 и R_2 — абсолютные значения радиусов кривизны поверхностей линзы.

103. Когда толщина линзы $d = \frac{n}{n-1} (R_1 + R_2)$, где R_1 и R_2 — абсолютные значения радиусов кривизны поверхностей линзы.

105. Главные плоскости совпадают с центром линзы. Фокальные плоскости расположены на расстоянии 28,2 см от линзы в воздухе и 37,5 см в воде. Узловые точки совпадают и расположены в воде на расстоянии 9,3 см от линзы.

106. $f = 50$ см. 1) 148 см от плоской поверхности; 2) 143 см от выпуклой поверхности. В обоих случаях изображение находится с противоположной стороны линзы по отношению к объекту.

107. $f = 6$ см. Главные плоскости лежат внутри линзы на расстояниях 1 и 1,6 см от поверхности линзы с большим радиусом кривизны.

108. $f = 2,5$ см. Положения фокальных точек и главных плоскостей изображены на рис. 84.

109. Нет. Это имеет место только в том случае, когда узловые точки совпадают с оптическим центром.

110. Собирающая. Главные плоскости лежат со стороны выпуклой поверхности на расстоянии d друг от друга. Первая главная плоскость удалена от выпуклой поверхности на расстояние $\frac{R}{n-1}$. На таком же расстоянии находится вторая главная плоскость от вогнутой поверхности. $f = \frac{nR^2}{(n-1)^2 d}$.

111. Рассеивающая. Главные плоскости совпадают и проходят через общий центр кривизны поверхностей линзы. $f = -\frac{nR(R-d)}{d(n-1)}$.

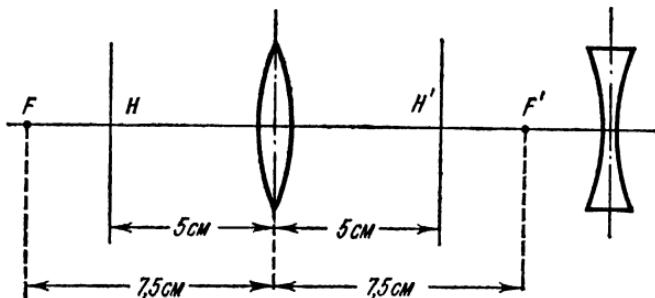


Рис. 84.

112. Объект должен находиться в одной из узловых или обратных узловых точек системы¹⁾.

113. Решение. Пусть малый объект, перпендикулярный к образующей цилиндра, помещен на внешней поверхности последнего в точке P (рис. 85). После преломления лучей на внутренней цилиндрической поверхности в окрестности точки A получится промежуточное изображение объекта в некоторой точке P' . Пользуясь формулами, приведенными в ответе к задаче 87, легко получить абсциссу x' точки P' (относительно начала координат A), а также поперечное увеличение y'/y :

$$x' = \frac{nR_2(R_2 - R_1)}{(n_2 - n)R_1 + nR_2}, \quad \frac{y'}{y} = \frac{n_2R_2}{(n_2 - n)R_1 + nR_2}.$$

¹⁾ Если световой луч выходит из некоторой точки оптической оси под углом u к ней, а по выходе из системы проходит через сопряженную точку под углом $u' = -u$, то эти две взаимно сопряженные точки называются обратными узловыми точками системы. Пользуясь формулами параксиальной оптики, легко показать, что центрированная система имеет одну пару обратных узловых точек.

Оставшиеся две преломляющие поверхности с вершинами в O и O' действуют как линза, для которой

$$f = -nn_2 \frac{R_1 R_2}{D}, \quad h = n(n_1 - n_2) \frac{R_2(R_1 - R_2)}{D},$$

где

$$D = n_1 R_1 (n_2 - n) + n R_2 (n_1 - n_2).$$

Точка P' по отношению к этой линзе играет роль объекта. Ее

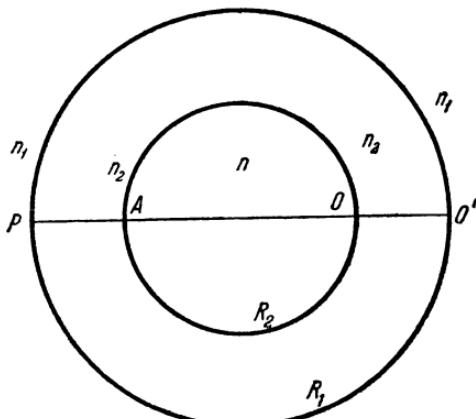


Рис. 85.

абсцисса относительно фокуса F этой линзы:

$$X = FP' = FH + HO + OA + AP' = f - h - 2R_2 + x'.$$

Далее

$$\frac{y_1}{y'} = \frac{f}{X},$$

и следовательно,

$$\frac{y}{y_1} = \frac{(n_2 - n) R_1 + n R_2}{n_2 R_2} \frac{X}{f},$$

откуда после несложных преобразований легко получить требуемый результат.

116. Решение. Очевидно, $A = \xi' + e - \xi$, где ξ и ξ' — координаты предмета и его изображения относительно соответствующих главных плоскостей. Исключая отсюда i из уравнения линзы ξ' , получим

$$\xi^2 + (A - e)\xi + (A - e)f = 0.$$

Если $A - e > 4f$, то уравнение имеет два вещественных корня ξ_1 и ξ_2 , и существуют два положения предмета, о которых идет речь в условии задачи. Расстояние между этими положениями:

$$a = |\xi_1 - \xi_2| = \sqrt{(A - e)^2 - 4f(A - e)},$$

откуда

$$f = \frac{(A-e)^2 - a^2}{4(A-e)} \approx \frac{A^2 - a^2}{4A} - \frac{A^2 + a^2}{4A^2} e.$$

Для определения e можно повторить опыт при другом расстоянии A_1 между предметом и экраном.

117. $\frac{1}{v} + \frac{1}{u} = \frac{2}{R} + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{u} \right)^2 \frac{h^2}{R}$. Расстояние h можно измерять либо по дуге, либо по перпендикуляру к оси зеркала, так как различие между этими двумя расстояниями может оказаться только на членах высшего порядка (именно, на членах, содержащих h^4).

118. Продольная аберрация равна $\frac{(1/R - 1/u)^2}{(2/R - 1/u)^2} \frac{h^2}{R}$.

119. 0,2 мм; 0,8 мм; 1,8 мм; 3,2 мм.

120. 3,1 мм.

121. 0,3 мм.

123. Продольная сферическая aberrация равна

$$v' - v = -\frac{n-1}{n^2} \left\{ \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{u} \right)^2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{n+1}{u} \right) - \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{v} \right)^2 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{n+1}{v} \right) \right\} \frac{v^2 h^2}{2},$$

где v и v' — координаты точек на оптической оси, в которых ее пересекают параксиальный луч и луч, встречающий линзу на высоте h .

124. 1) —0,292 см; —0,0147 см. 2) —1,125 см; —0,056 см.

125. $f_{kp} = 1015$ мм, $f_{jk} = 1000$ мм, $f_c = 982$ мм; $\Delta f = 33$ мм.

126. $D_{kp} = 0,75$ мм, $D_c = 0,90$ мм.

127. $N = \frac{X'}{f} \frac{L}{X' - a} = \frac{L}{f + aX/f}$. Увеличение не зависит от положения глаза и равно $N = L/f$, если $X = 0$, т. е. предмет помещен в главном фокусе лупы; в этом случае глаз должен быть аккомодирован на бесконечность. Увеличение не зависит от положения предмета и также равно $N = L/f$, если $a = 0$, т. е. глаз помещен в заднем фокусе лупы. Когда глаз аккомодирован на наименьшее расстояние ясного зрения, $X' = a - L$, $N = (L - a)/f$. Обычно объект помещается очень близко от главного фокуса, так что практически всегда $N = L/f$.

128. Если окуляр ахроматизован в отношении фокусных расстояний, то его угловое увеличение не зависит от длины световой волны (см. предыдущую задачу).

129. Решение. Фокусное расстояние f системы двух тонких линз, находящихся на расстоянии l друг от друга, определяется формулой

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{l}{f_1 f_2}. \quad (129.1)$$

При этом

$$\frac{1}{f_1} = (n-1) A_1, \quad \frac{1}{f_2} = (n-1) A_2, \quad (129.2)$$

где A_1 и A_2 — постоянные, зависящие только от кривизны поверхностей линз. Условие ахроматизации:

$$\delta\left(\frac{1}{f}\right) = \delta\left(\frac{1}{f_1}\right) + \delta\left(\frac{1}{f_2}\right) - \frac{l}{f_2} \delta\left(\frac{1}{f_1}\right) - \frac{l}{f_1} \delta\left(\frac{1}{f_2}\right) = 0.$$

Подставляя сюда $\delta(1/f_1) = A_1 \delta n$, $\delta(1/f_2) = A_2 \delta n$, после несложных преобразований получим решение задачи.

130. $f = f_1 = f_2$. Положения главных плоскостей и фокальных точек показаны на рис. 86.

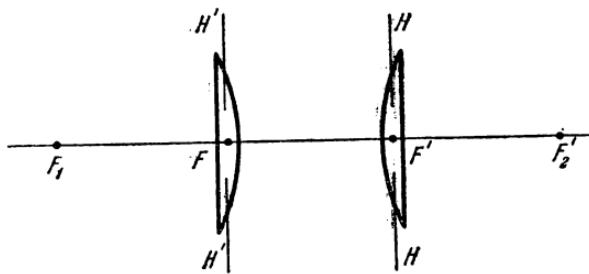


Рис. 86.

131. $f_1 = 3f_2$, $l = \frac{1}{2}(f_1 + f_2) = 2f_2 = \frac{2}{3}f_1$, $f = \frac{3}{2}f_2 = \frac{1}{2}f_1$. Положения главных плоскостей и фокальных точек показаны на рис. 87.

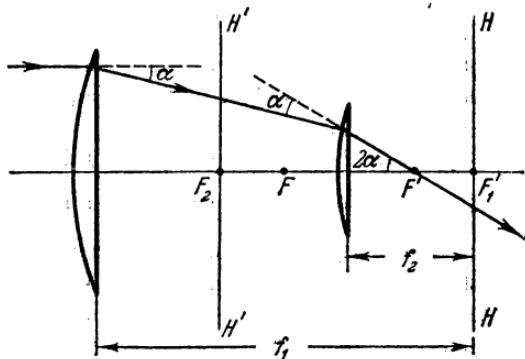


Рис. 87.

Там же приведен ход одного из лучей, падающих на окуляр Гюйгенса параллельно главной оптической оси.

133. $f = \frac{3}{4} f_1$. Положения главных плоскостей и фокальных точек показаны на рис. 88. Крест нитей должен быть помещен перед первой линзой на расстоянии $\frac{1}{4} f_1$ от нее.

134. $\frac{1}{f_1} \frac{\delta n_1}{n_1 - 1} + \frac{1}{f_2} \frac{\delta n_2}{n_2 - 1} = 0$. Фокусные расстояния обеих компонент имеют всегда противоположные знаки. Если вся система собирающая, то линза с большей дисперсией рассеивающая, а линза с меньшей дисперсией собирающая. Наоборот, если система рассеивающая, то линза с большей дисперсией должна быть собирающей, а линза с меньшей дисперсией — рассеивающей.

135. Решение. Объектив телескопа, бинокля и т. п. является собирающей системой. Поэтому двояковыпуклая линза этой системы

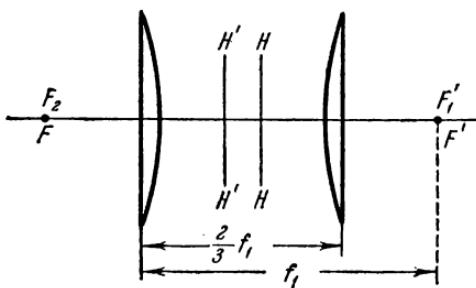


Рис. 88.

должна делаться из материала с меньшей дисперсией (т. е. кроны), а плоско-выгнутая — из материала с большей дисперсией (т. е. флинта) (см. решение предыдущей задачи).

136. Первая линза: $R_1 = 41,6$ см; $R_2 = -41,3$ см; вторая линза: $R_1 = -41,3$ см; $R_2 = \infty$.

137. Это возможно для толстой линзы благодаря тому, что в формулу, определяющую ее фокусное расстояние, входит n^2 . Следовательно, могут существовать два значения n_1 и n_2 , которым соответствует одно значение f . Толщина линзы должна быть равна $d = \frac{n^2}{n^2 - 1} (R_1 - R_2)$, где $n = \sqrt{n_1 n_2}$ — среднее геометрическое из n_1 и n_2 . Так как толщина существенно положительна, то для возможности ахроматизации необходимо, чтобы $R_1 - R_2 > 0$. Этому условию удовлетворяют только двояковыпуклые и выпукло-вогнутые линзы. Все прочие толстые линзы не могут быть ахроматизированы.

138. Результат следует из формулы $f = -f' = \frac{n+1}{n-1} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$, дающей фокусное расстояние линзы для показателя преломления $n = \sqrt{n_1 n_2}$.

139. $d = 31,42$ см; $f = -f' = +20,2$ см.

141. Пластиинку надо повернуть на угол $\beta = \frac{1}{\alpha} \frac{n_F - n_C}{n-1} + \frac{\alpha}{2} = 1,8^\circ$ так, чтобы фиолетовый конец спектра был ближе к объективу, чем красный.

142. Решение. Если световой луч AB падает на поверхность шара под углом φ и преломляется под углом ψ (рис. 89), то угол

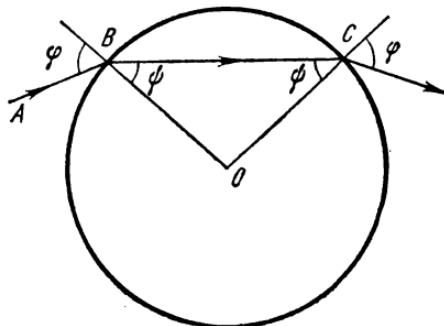


Рис. 89.

падения BCO преломленного луча BC на эту поверхность будет равен ψ . Отсюда следует, что луч выйдет из шара под углом φ к нормали OC .

143. Если ψ — угол преломления в капле, то при однократном отражении $\cos \varphi = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}}$, $\alpha = 4\psi - 2\varphi$, $\alpha_{kp} = 42^\circ 42'$, $\alpha_\Phi = 40^\circ 44'$.

При двукратном отражении

$\cos \varphi = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{8}}$, $\alpha = 180^\circ + 2\varphi - 6\psi$, $\alpha_{kp} = 49^\circ 46'$, $\alpha_\Phi = 53^\circ 29'$.

144. $\cos \varphi = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{N(N+2)}}$, $\delta = N\pi + 2\varphi - 2(N+1)\psi$.

Радуги 3—6 порядков характеризуются следующими данными:

Номер радуги	φ	ψ	δ	α
3	$76^\circ 55'$	$47^\circ 04'$	$317^\circ 20'$	$42^\circ 40'$
4	$79^\circ 41'$	$47^\circ 42'$	$42^\circ 20'$	$42^\circ 40'$
5	$81^\circ 29'$	$48^\circ 02'$	$126^\circ 30'$	$53^\circ 30'$
6	$82^\circ 40'$	$48^\circ 14'$	$210^\circ 00'$	$30^\circ 00'$

Третья и четвертая радуги находятся сзади наблюдателя, если он обращен лицом к первой радуге. Когда туча проходит между наблюдателем и Солнцем, то наблюдатель видит капли сильно освещенными от тех лучей, которые преломляются в каплях без внутреннего отражения. Интенсивность этих лучей значительно превосходит интенсивность лучей третьей и четвертой радуг. Пятая радуга почти точно совпадает со второй, а шестая находится внутри первой. Эти радуги никогда не бывают видимы, так как при каждом внутреннем отражении интенсивность света ослабляется вследствие преломления. Читателю рекомендуется сделать точные чертежи для хода лучей в капле в случае радуг первых шести порядков.

145. $21^{\circ}52'$; $45^{\circ}44'$. В обоих кругах внешний край синеватый, а внутренний красноватый.

146. Решение. Вообразим ряд плоскопараллельных слоев с постоянными показателями преломления n_1, n_2, n_3, \dots (рис. 90).

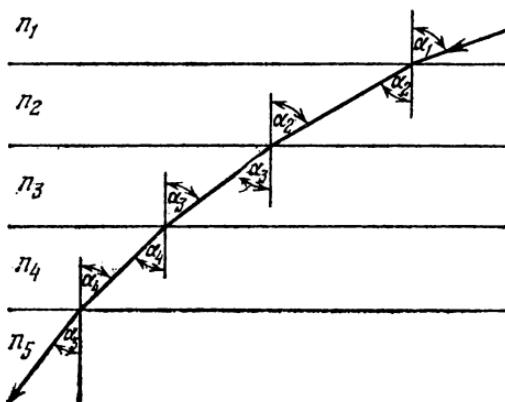


Рис. 90.

При распространении света в такой слоистой среде в силу закона преломления справедливы соотношения:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 = n_3 \sin \alpha_3 = \dots$$

Пусть теперь число слоев неограниченно растет, а толщина каждого из них неограниченно убывает. В пределе мы получим неоднородную среду с непрерывно изменяющимся показателем преломления. Если показатель преломления меняется мало на протяжении длины световой волны, то можно пренебречь эффектами отражения на границах слоев. Свет распространяется в такой среде вдоль лучей, имеющих форму кривых линий. Примем за ось Z прямую, перпендикулярную к слоям, и обозначим через α угол между осью Z и

касательной к лучу, а через N — нормаль к тому же лучу (рис. 91). Тогда

$$n \sin \alpha = \text{const}.$$

Дифференцируя это соотношение по длине s дуги луча и принимая во внимание, что $1/\rho = d\alpha/ds$, получим

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\sin \alpha}{n \cos \alpha} \frac{dn}{ds}.$$

Так как $\frac{dn}{ds} = \frac{dn}{dz} \cos \alpha$, $\frac{dn}{dN} = -\frac{dn}{dz} \sin \alpha$, то

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dN} = \frac{d}{dN} (\ln n).$$

Формула выведена для слоистой среды. Однако она справедлива и в общем случае, так как небольшой объем любой среды можно рассматривать как часть слоистой среды (см. также задачу 157).

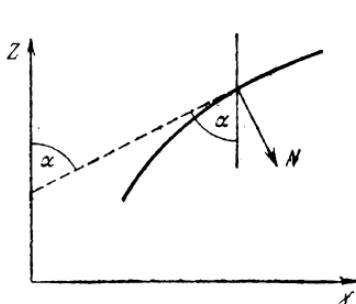


Рис. 91.

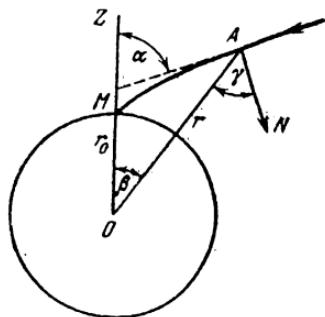


Рис. 92.

147. Решение. Если n зависит только от r , то путь светового луча AM (рис. 92) будет плоской кривой, лежащей в плоскости, которая проходит через звезду и вертикаль MZ места наблюдения. Обозначим через α переменный угол, составляемый вертикалью MZ и касательной к лучу (этот угол называется зенитным расстоянием). Через s обозначим длину луча, отсчитываемую от точки M . Тогда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d}{dN} (\ln n),$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dr} \frac{dr}{ds} = \frac{d\alpha}{dr} \sin \gamma = \frac{d\alpha}{dr} \cos(\alpha - \beta);$$

$$\frac{d}{dN} (\ln n) = \frac{d}{dr} (\ln n) \cos \gamma = -\frac{d}{dr} (\ln n) \sin(\alpha - \beta).$$

Отсюда

$$\frac{d\alpha}{dr} \frac{1}{\sin(\alpha - \beta)} = -\frac{d}{dr} (\ln n). \quad (147.1)$$

Далее из рис. 92

$$d\beta = \frac{ds}{r} \cos \gamma = \frac{ds}{r} \sin (\alpha - \beta),$$

откуда

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{d\beta}{dr} \frac{dr}{ds} = \frac{d\beta}{dr} \cos (\alpha - \beta) = \frac{1}{r} \sin (\alpha - \beta).$$

Итак,

$$\frac{d\beta}{dr} \frac{1}{\tan (\alpha - \beta)} = \frac{1}{r}. \quad (147.2)$$

Вычитая (147.2) из (147.1), находим

$$\frac{d(\alpha - \beta)}{\tan (\alpha - \beta)} = -d \ln (nr).$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\frac{\sin (\alpha - \beta)}{\sin \alpha_0} = \frac{n_0 r_0}{nr}, \quad (147.3)$$

где r_0 — радиус земного шара, n_0 — показатель преломления воздуха у поверхности Земли, α_0 — видимое зенитное расстояние звезды при наблюдении из точки M . Вычислив из (147.3) $\tan (\alpha - \beta)$ и подставив полученное значение в (147.1), найдем после интегрирования

$$\alpha_\infty - \alpha_0 = -n_0 r_0 \sin \alpha_0 \int_{r_0}^{\infty} \frac{d}{dr} (\ln n) \frac{dr}{\sqrt{n^2 r^2 - n_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha_0}}, \quad (147.4)$$

Здесь α_∞ обозначает угол, образуемый асимптотой к лучу с вертикалью места. Разность $\alpha_\infty - \alpha_0$ дает угол отклонения направления луча при прохождении через земную атмосферу и носит название рефракции. Зная закон изменения показателя преломления n с высотой и измеряя видимое зенитное расстояние звезды α_0 , можно по формуле (147.4) вычислить рефракцию $\alpha_\infty - \alpha_0$ ¹.

149. Для видимых зенитных расстояний, не превосходящих примерно 75° , можно пользоваться приближенной формулой

$$\alpha_\infty - \alpha_0 = (n_0 - 1) \tan \alpha_0.$$

При $\alpha_0 = 70^\circ$ получаем $\alpha_\infty - \alpha_0 = 2'46''$. В Пулковских таблицах для $\alpha_0 = 70^\circ$ находим $\alpha_\infty - \alpha_0 = 2'45,673''$.

¹) Формула (147.4) использовалась при составлении таблиц рефракции. Показатель преломления воздуха n в зависимости от высоты h над земной поверхностью вычислялся по плотности ρ с помощью формулы $n - 1 = A\rho$, где A — постоянная. (В ранних вычислениях применялась формула $n^2 - 1 = A\rho$, дающая практически такую же точность.)

150. Решение. Так как $n - 1 \ll 1$, то $\ln n = \ln [1 + (n - 1)] \approx n - 1$. Тогда

$$\alpha_\infty - \alpha_0 = \frac{\mu g}{RT} n_0 r_0 \sin \alpha_0 (n_0 - 1) \int_{r_0}^{\infty} \frac{\exp \left\{ -\frac{\mu g}{RT} (r - r_0) \right\}}{\sqrt{n^2 r^2 - n_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha_0}} dr,$$

где μ — относительная молекулярная масса воздуха, R — газовая постоянная, T — абсолютная температура. Подкоренное выражение можно заменить приближенным выражением

$$n^2 r^2 - n_0^2 r_0^2 \sin^2 \alpha_0 = \\ = (nr + n_0 r_0 \sin \alpha_0)(nr - n_0 r_0 \sin \alpha_0) \approx n_0^2 r_0 (1 + \sin \alpha_0)(r - r_0 \sin \alpha_0).$$

Тогда

$$\alpha_\infty - \alpha_0 = 2(n_0 - 1)x_0 \operatorname{tg} \alpha_0 \int_{x_0}^{\infty} e^{-(x^2 - x_0^2)} dx,$$

где $x_0^2 = \frac{\mu g r_0}{RT} (1 - \sin \alpha_0)$. Для функции

$$\Phi(x_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x_0} e^{-x^2} dx,$$

называемой интегралом вероятности ошибок, имеются специальные таблицы¹⁾, которыми и можно пользоваться при малых x_0 .

$$151. \alpha_\infty - \alpha_0 = \sqrt{\frac{\pi \mu g r_0}{2RT}} (n_0 - 1) = 35'29''.$$

$$152. 33\,000 \text{ км}; 1,6 \cdot 10^{-9} \text{ см}^{-1}.$$

153. Решение. Необходимо, чтобы показатель преломления воздуха увеличивался с высотой h . Показатель преломления воздуха зависит только от плотности и увеличивается вместе с ней. Поэтому необходимо, чтобы было $d\rho/dh > 0$. Так как $\rho \sim P/T$, то отсюда получаем

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{P} - \frac{dT}{T}.$$

При механическом равновесии $\partial P/\partial h = -\rho g$, где g — ускорение свободного падения. Следовательно,

$$\frac{dT}{dh} < -\frac{\rho T}{P} g, \quad \text{или} \quad \frac{dT}{dh} < -\frac{\mu g}{R},$$

¹⁾ См., например, А. А. Марков, Исчисление вероятностей, Госиздат, 1924. Наиболее полными таблицами являются «Таблицы вероятностных функций», том I, Вычислительный центр АН СССР, 1958.

где μ — относительная молекулярная масса воздуха. С помощью формулы Р. Майера $c_p - c_v = R/\mu$ отсюда легко получить

$$\frac{dT}{dh} < -\frac{g}{c_p - c_v} \approx -0,025 \text{ К/м.}$$

Такое распределение температуры конвективно неустойчиво. Для конвективной устойчивости должно быть

$$\frac{dT}{dh} \geq -\frac{g}{c_p}.$$

154. Решение. Пусть круг K радиуса ρ (рис. 93) представляет путь светового луча в среде, показатель преломления n которой зависит только от расстояния r до точки O . Тогда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d}{dN} (\ln n) = -\frac{d}{dr} (\ln n) \cos \vartheta.$$

Обозначим через b расстояние OA между точкой O и центром A круга K . Тогда

$$b^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \vartheta.$$

Определив отсюда $\cos \vartheta$ и подставив полученное выражение в предыдущее уравнение, найдем

$$d(\ln n) = -\frac{2r dr}{r^2 + \rho^2 - b^2},$$

откуда

$$n = \frac{C}{r^2 + \rho^2 - b^2}, \quad (154.1)$$

где C — произвольная постоянная.

Возьмем на окружности K произвольную точку P и продолжим прямую PO до пересечения ее с окружностью K в точке P' (рис. 94). В середине A_0 прямой PP' восставим к ней перпендикуляр CD . Из произвольной точки A_1 этого перпендикуляра, как из центра, опишем окружность K_1 радиуса ρ_1 , проходящую через точку P (а следовательно, и через точку P'). Для того чтобы световой луч описывал окружность K_1 , необходимо, чтобы показатель преломления среды менялся по закону

$$n = \frac{C_1}{r^2 + \rho_1^2 - b_1^2}, \quad (154.2)$$

где b_1 обозначает расстояние A_1O , а C_1 — произвольная постоянная. Докажем, что формулы (154.1) и (154.2) тождественны. Прежде всего

установим, что

$$\rho^2 - b^2 = \rho_1^2 - b_1^2.$$

Из прямоугольных треугольников AOA_0 и APA_0 находим

$$\rho^2 = PA_0^2 + AA_0^2, \quad b^2 = A_0O^2 + AA_0^2,$$

откуда

$$\rho^2 - b^2 = PA_0^2 - A_0O^2.$$

Аналогично, из прямоугольных треугольников A_1PA_0 и A_1OA_0 получим

$$\rho_1^2 - b_1^2 = PA_0^2 - A_0O^2.$$

Сравнивая это с предыдущим выражением, получаем доказываемое. Таким образом, можно положить $\rho^2 - b^2 = \rho_1^2 - b_1^2 = a^2$.

Выясним теперь физический смысл постоянных C и C_1 . Полагая в (154.1) и (154.2) $r = 0$ и обозначая через n_0 показатель преломления

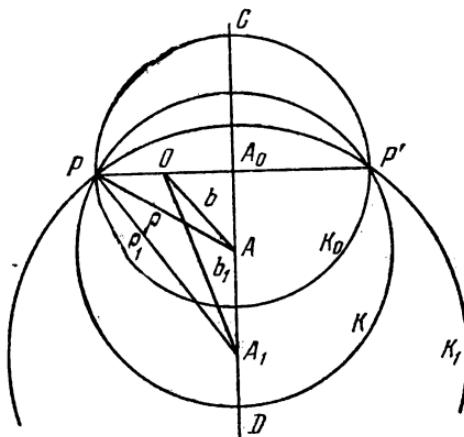


Рис. 94.

среды в точке O , находим $C = C_1 = n_0 a^2$. Значит, выражения (154.1) и (154.2) тождественны, и их можно переписать в виде

$$n = \frac{n_0}{1 + r^2/a^2}. \quad (154.3)$$

Если показатель преломления среды изменяется по закону (154.3), то луч света, выйдя из точки P , описывает окружность, центр которой лежит на прямой CD . Положение центра на этой прямой зависит от направления луча в точке P . Но каково бы ни было направление луча в точке P , он всегда пройдет через точку P' . Следовательно, все лучи, вышедшие из точки P , собираются в точке P' . Иными словами, P' является стигматическим изображением точки P . Подобными

свойствами обладает произвольная точка среды. Действительно, в качестве окружности K можно взять любую окружность из семейства окружностей с центрами на прямой CD и проходящих через точку P , а сама точка P на окружности K может быть выбрана где угодно. Из построения легко найти и увеличение, даваемое «рыбным глазом» при изображении какого-либо предмета.

155. $\rho = a$.

156. Нельзя.

Решение. Формально движение частицы в консервативном поле сил происходит так же, как распространение светового луча в неоднородной изотропной среде. Роль показателя преломления играет скорость частицы v . Поэтому, если бы можно было осуществить «рыбий глаз» в электронной оптике, то скорость электронов v в поле должна была бы определяться выражением

$$v = \frac{v_0}{1 + r^2/a^2}.$$

С другой стороны, на основании закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + eV = \text{const},$$

где V — потенциал поля. С помощью этого и предыдущего соотношения можно выразить V как функцию от r . Окажется, что эта функция не удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Отсюда следует, что с помощью электростатического поля в вакууме осуществить «рыбий глаз» невозможно. Для этого необходимо наличие пространственного заряда.

157. **Решение.** Радиус кривизны ρ траектории движения частицы определяется из выражения для центростремительного ускорения

$$\frac{mv^2}{\rho} = F_N,$$

где F_N — слагающая действующей силы вдоль главной нормали к траектории частицы. Если U — потенциальная энергия частицы, то $F_N = -\partial U / \partial N$. С другой стороны, по закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + U = \text{const}, \quad \text{откуда} \quad mv \frac{\partial v}{\partial N} = -\frac{\partial U}{\partial N}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial N}.$$

Заменив здесь скорость частицы v на показатель преломления n среды, получим искомую формулу для кривизны луча:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial N} = \frac{\partial}{\partial N} (\ln n).$$

158. Решение. Заменяя в формуле для кривизны луча величину n на v , получим

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial}{\partial N} (\ln v).$$

На основании закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + eV = \text{const}, \quad e < 0, \quad V > 0,$$

причем в силу нормировки потенциала $\text{const} = 0$, так как при $V = 0$ $v = 0$. Таким образом,

$$2 \ln v = \ln V + \text{const}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial N} (\ln V) = \frac{1}{2V} \frac{\partial V}{\partial N} = -\frac{E_N}{2V}.$$

159. Пусть AB — малый объект, перпендикулярный к главной оптической оси, а $A'B'$ — его изображение (рис. 95). Оптические

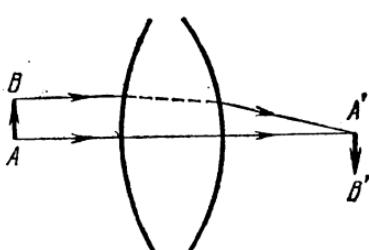


Рис. 95.

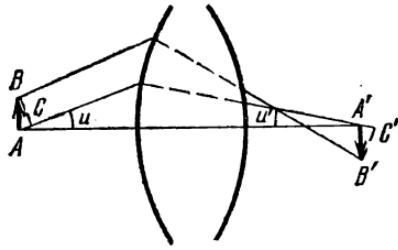


Рис. 96.

длины всех лучей, выходящих из A и собирающихся в A' , одинаковы: Одинаковы и оптические длины всех лучей, выходящих из B и собирающихся в B' . Более того, оптические длины всех лучей AA' равны оптическим длинам всех лучей BB' . Достаточно доказать это утверждение для лучей, выходящих из объекта AB параллельно главной оптической оси. Это — параксиальные лучи. Поэтому бесконечно малый участок плоского волнового фронта AB после прохождения через объектив остается приблизительно плоским и перпендикулярным к главной оптической оси. Возьмем волновой фронт $A'B'$, проходящий через точку A' — изображение точки A . Так как длины всех лучей от одного положения волнового фронта до другого одинаковы, то отсюда и следует доказываемое утверждение.

Проведем теперь через точки A и B бесконечно узкий параллельный пучок лучей, наклоненных к главной оптической оси под

произвольным углом u (рис. 96). Волновой фронт BC перейдет в волновой фронт $B'C'$, причем ввиду бесконечной тонкости взятого пучка лучей его расходимость в пространстве изображений будет бесконечно мала. Так как оптические длины всех лучей между волновыми фронтами BC и $B'C'$ одинаковы, то $(BB')=(CA'C')$, а по доказанному ранее $(BB')=(ACA')$. Отсюда $(ACA')=(CA'C')$. После вычитания общей части (CA') находим $(AC)=A'C'$. Таким образом, должно быть

$$ny \sin u = n'y' \sin u',$$

где $y=AB$, $y'=A'B'$, n — показатель преломления в пространстве предметов, n' — в пространстве изображений. Это и есть искомое условие (так называемое условие синусов Аббе). Оно должно выполняться для любых (малых) значений y и y' и любых углов u и u' .

160. Решение. Входным зрачком системы будет уменьшенное изображение зрачка глаза, помещенного в аplanатическую точку P' . Передняя аplanатическая точка P будет центром входного зрачка. Пусть плоскость AB , перпендикулярная к оптической оси, помещена перед аplanатической точкой P на расстоянии a от последней, которое велико по сравнению с диаметром входного зрачка.

Рассмотрим изображение плоскости AB , даваемое объективом. Из каждой точки плоскости AB через оптическую систему может пройти конус лучей только очень малого раствора, определяемого размерами входного зрачка. Так как эти лучи не параксиальные, а, вообще говоря, наклонены под большими углами к оптической оси, то пучки будут астигматическими. В дальнейшем мы пренебрегаем астигматизмом, а также искривлением плоскости изображения. В этом приближении плоскость AB изобразится в виде сопряженной плоскости $A'B'$, перпендикулярной к оптической оси, и можно следующим способом построить изображение точки.

Из рассматриваемой точки A плоскости AB проводим луч AP через центр входного зрачка, образующий с оптической осью некоторый угол u . Тогда сопряженный с ним луч $A'P'$ пройдет через вторую аplanатическую точку P' под углом u' , значение которого определяется условием синусов: $nl \sin u = n'l' \sin u'$. Точка пересечения этого луча с плоскостью $A'B'$ и будет изображением точки A . Пусть y и z — координаты точки A в плоскости AB , а y' и z' — координаты точки A' . В таком случае

$$\sin u = \sqrt{\frac{y^2 + z^2}{a^2 + y^2 + z^2}}, \quad \sin u' = \sqrt{\frac{y'^2 + z'^2}{a'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

где a' — расстояние точки P' от плоскости $A'B'$. Подставляя эти выражения в условие синусов и вводя обозначение $\alpha = nl/n'l'$, получим

$$\alpha^2 (y^2 + z^2) (a'^2 + y'^2 + z'^2) = (y'^2 + z'^2) (a^2 + y^2 + z^2).$$

В силу осевой симметрии системы $z'/y' = z/y$. Исключая с помощью этого соотношения z' , найдем

$$[\alpha^2(a'^2 + y'^2) - y'^2] y^2 - y'^2(1 - \alpha^2) z^2 = a^2 y'^2.$$

Рассмотрим в плоскости $A'B'$ прямую $y' = \pm p$, параллельную оси Z . В плоскости AB ей соответствует кривая

$$[\alpha^2 a'^2 - p^2(1 - \alpha^2)] y^2 - p^2(1 - \alpha^2) z^2 = a^2 p^2,$$

изображением которой является рассматриваемая прямая. Так как для объективов микроскопов α — малая величина, то, пренебрегая ее квадратом по сравнению с единицей и вводя обозначение $\omega = \frac{p}{\alpha a'} = \frac{p}{a'} \frac{l'n'}{\ln}$, получим

$$\frac{y^2}{a^2 \omega^2 / (1 - \omega^2)} - \frac{z^2}{a^2} = 1. \quad (160.1)$$

Если $\omega^2 < 1$, то (160.1) есть уравнение семейства гипербол. Аналогично, семейству прямых $z' = \pm p$, параллельных оси Y , соответствует семейство гипербол

$$-\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2 \omega^2 / (1 - \omega^2)} = 1, \quad (160.2)$$

получающееся из (160.1) путем поворота на 90° вокруг оптической оси системы. Если на листе бумаги начертить оба семейства (160.1) и (160.2) и поместить полученный рисунок на расстоянии a перед передней апланатической точкой объектива P , то объектив даст изображение этого рисунка в виде прямоугольной сетки прямых. При $\omega = 1/\sqrt{2}$ (160.1) переходит в $y^2 - z^2 = a^2$, а (160.2) — в $z^2 - y^2 = a^2$. Эти гиперболы имеют асимптотами биссектрисы координатных углов. Следовательно, a есть расстояние от начала координат до вершины той из гипербол, асимптоты которой совпадают с биссектрисами координатных углов.

161. $a \approx 7$ мм.

162. Решение. Необходимость теоремы очевидна. Докажем ее достаточность. Соединим P и P' произвольным лучом. Пусть \mathbf{l}_1 и \mathbf{l}_2 — два бесконечно малых неколлинеарных вектора, проходящих через точку P , для которых удовлетворяется условие косинусов. Тогда разности

$$n's'\mathbf{l}'_1 - ns\mathbf{l} = H_1, \quad n's'\mathbf{l}'_2 - ns\mathbf{l}_2 = H_2 \quad (162.1)$$

не зависят от направления луча, соединяющего P с P' . Но они, конечно, могут зависеть от направлений векторов \mathbf{l}_1 и \mathbf{l}_2 . Произвольный вектор \mathbf{l} , проходящий через точку P и лежащий в плоскости предмета, можно разложить по векторам \mathbf{l}_1 и \mathbf{l}_2 : $\mathbf{l} = a\mathbf{l}_1 + b\mathbf{l}_2$, где a и b , разумеется, не зависят от s . Введем вектор $\mathbf{l}' = a\mathbf{l}'_1 + b\mathbf{l}'_2$, умножим (162.1) на a и b и сложим. Получим

$$n's'\mathbf{l}' - ns\mathbf{l} = H, \quad (162.2)$$

где $H = aH_1 + bH_2$. Отсюда видно, что разность (162.2) не зависит от s , т. е. условие косинусов выполнено для произвольного вектора \mathbf{l} , проходящего через точку P и лежащего в плоскости предмета. Следовательно, этот (плоский) предмет изображается оптической системой стигматически.

163. Решение. Направления отрезков \mathbf{l}_1 и \mathbf{l}_2 примем за координатные оси X и Y в пространстве предметов, а точку их пересечения — за начало координат. Аналогичную роль будут играть сопряженные отрезки \mathbf{l}'_1 и \mathbf{l}'_2 в пространстве изображений. Тогда координаты x, y любой точки площадки-объекта будут связаны с координатами x', y' сопряженной точки площадки-изображения формулами вида

$$x' = Ax, \quad y' = By, \quad (163.1)$$

где A и B — постоянные. Действительно, поскольку площадки бесконечно малы, координаты x', y' должны выражаться линейно через x и y . Эта связь должна быть вида (163.1), так как ось X' является изображением оси X , а ось Y' — изображением оси Y .

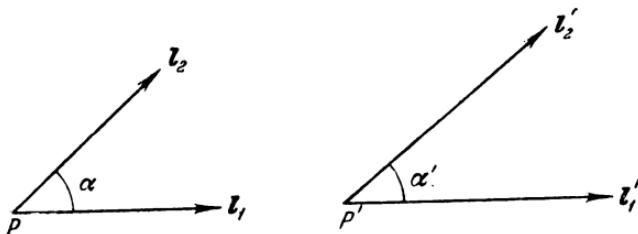


Рис. 97.

По условию теоремы лучи, выходящие из P (рис. 97) в направлениях \mathbf{l}_1 и \mathbf{l}_2 , лежат в поле инструмента. В пространстве изображений они пройдут в направлениях сопряженных отрезков \mathbf{l}'_1 и \mathbf{l}'_2 . Рассмотрим сначала изображение отрезка \mathbf{l}_1 . Возьмем два луча, исходящих из P в направлениях \mathbf{l}_2 и \mathbf{l}_1 . На основании теоремы косинусов можно написать

$$nl_1 \cos \alpha - n'l'_1 \cos \alpha' = nl_1 - n'l'_1, \quad (163.2)$$

где α — угол между отрезками \mathbf{l}_1 и \mathbf{l}_2 , а α' — угол между сопряженными отрезками \mathbf{l}'_1 и \mathbf{l}'_2 . Аналогично, рассматривая изображение отрезка \mathbf{l}_2 , получим

$$nl_2 \cos \alpha - n'l'_2 \cos \alpha' = nl_2 - n'l'_2. \quad (163.3)$$

Допустим, что $\mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_2$. Докажем, что тогда $\mathbf{l}'_1 = \mathbf{l}'_2$. В самом деле, вычитание (163.3) из (163.2) дает

$$n'l'_1(1 - \cos \alpha') = n'l'_2(1 - \cos \alpha'). \quad (163.4)$$

Так как, по предположению, угол α отличен от нуля, то угол α' также отличен от нуля. Поэтому на основании (163.4) $l'_1 = l'_2$, что и требовалось доказать. Из доказанного следует, что отрезки l_1 и l_2 изображаются оптической системой с одинаковым увеличением. Следовательно, в рассматриваемом случае в формулах (163.1) $A=B$, а поэтому увеличение любого отрезка в плоскости предмета не зависит от его направления. Отсюда следует, что изображение происходит с сохранением подобия. Но изображение с сохранением подобия характеризуется также сохранением углов. Таким образом, $\alpha=\alpha'$, и формула (163.2) дает $nl_1=n'l'_1$. Вообще для всякого отрезка l , лежащего в плоскости предмета,

$$nl=n'l', \quad l'/l=n/n', \quad (163.5)$$

и вторая часть теоремы доказана.

Следовательно, стигматические изображения площадок, лежащих тангенциальном в поле инструмента, могут происходить только с вполне определенным увеличением n/n' . В частности, когда показатели преломления пространств предметов и изображений одинаковы, это увеличение равно единице. Однако если площадки не лежат тангенциальном в поле инструмента, то стигматическое изображение возможно и с другим увеличением. Примером может служить изображение площадки при преломлении на поверхности шара, когда изображаемая площадка перпендикулярна к оптической оси и проходит через одну из аplanатических точек шара (см. задачу 82).

164. Сформулированная теорема является непосредственным следствием теоремы, доказанной в предыдущей задаче.

165. Теорема доказывается так же, как аналогичная теорема, сформулированная в задаче 162.

166. Решение. В случае стигматического изображения элементов объема всегда существуют три отрезка l_1 , l_2 , l_3 , не находящихся в одной плоскости и лежащих тангенциальном в поле инструмента. Повторяя рассуждения, проведенные применительно к изображениям элементов поверхности (см. задачу 163), приходим к заключению, что эти три отрезка изображаются с одним и тем же увеличением. Отсюда уже нетрудно получить сформулированную теорему совершенно так же, как было сделано в решении задачи 163.

167. Решение. Пусть P , P' — пара сопряженных точек. Докажем теорему сначала для частного случая, когда другая пара сопряженных точек Q , Q' лежит на одном из лучей, соединяющих P и P' , например на луче PQP' (рис. 98). Соединим P с P' произвольным лучом PAP' . Так как P , P' — сопряженные точки, то $(PAP')=(PQP')$. А так как $P'Q'$, очевидно, является оптическим изображением PQ , то в силу теоремы, доказанной в предыдущей

задаче, $(PQ) = (P'Q')$. Комбинируя эти два равенства, получим $(PAP') = (QP'Q')$, что и требовалось доказать.

Общий случай может быть сведен к рассмотренному частному случаю, если заметить, что произвольные точки P и Q могут быть всегда соединены кусочно гладкой кривой, отдельные звенья которой являются лучами. Последнее утверждение непосредственно следует из леммы Гейне—Бореля, если принять во внимание, что

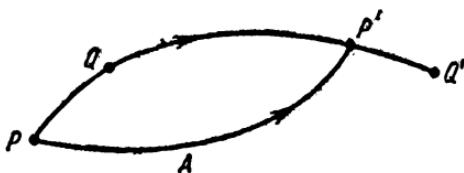


Рис. 98.

каждой точке пространства в абсолютном оптическом инструменте соответствует конус лучей конечного раствора, сходящихся в сопряженной точке.

168. Решение. Проведем через произвольную точку O пространства предметов три луча, лежащих в поле инструмента и не находящихся в одной плоскости. В пространстве изображений эти три луча пересекутся в сопряженной точке O' . Примем эти лучи за координатные оси в пространствах предметов и изображений. Тогда координатные оси одной координатной системы будут изображаться координатными осями другой координатной системы. Без ущерба для общности можно принять, что одноименные оси являются сопряженными. В таком случае при надлежащем выборе положительных направлений координатных осей координаты сопряженных точек будут связаны соотношениями

$$x' = \frac{n}{n'} x, \quad y' = \frac{n}{n'} y, \quad z' = \frac{n}{n'} z$$

(см. решения задач 163 и 166). При постоянных n и n' эти соотношения должны быть справедливы не только для бесконечно малых областей, но и для всего пространства предметов и всего пространства изображений. Отсюда заключаем, что инструмент является телескопической системой, в которой всякая прямая изображается в виде прямой.

169. Решение. Рассмотрим случай одной преломляющей поверхности. Если точка-объект помещена на этой поверхности, то ее изображение получится в той же точке. Отсюда и на основании теоремы, доказанной в задаче 160, заключаем, что оптическая длина луча соединяющего любые сопряженные точки P и P' , должна быть равна

шую (следовательно, если P —действительная светящаяся точка, то ее изображение будет мнимым). Единственный случай, когда это условие удовлетворяется при любом положении точки P , реализуется при отражении от плоского зеркала.

Случай нескольких преломляющих поверхностей, а также их комбинаций с отражающими поверхностями сводится к разобранному случаю одной преломляющей поверхности.

170. См. доказательство предыдущей теоремы.

§ 2. Фотометрия

171. $h = \sqrt{2}/2$ м.

172. Точная величина освещенности $E = \frac{I}{R^2 + d^2}$, где I —сила света диска, а d —расстояние от диска. При $d = 10R$ $E = \frac{I}{1,01d^2}$.

173. $I_\theta = I_0/\cos^3 \theta$, где θ —угол между лучом и вертикалью.

174. Яркость поверхности шара всюду одинакова, за исключением того места, на которое падает параллельный пучок лучей.

175. Яркость изображения приблизительно пропорциональна отношению площади отверстия зеркала к фокусному расстоянию.

176. Решение. Пусть S —видимая площадь фонаря, B —его поверхностная яркость, а r —расстояние фонаря от глаза наблюдателя. Световой поток, посыпаемый фонарем в глаз наблюдателя, определяется выражением

$$\Phi = \frac{BS\sigma}{r^2},$$

где σ —площадь зрачка глаза. Если S' —площадь изображения на сетчатке, то освещенность сетчатки E будет равна

$$E = \frac{\Phi}{S'} = B \frac{\sigma}{r^2} \frac{S}{S'}.$$

Отношение S'/S представляет собой квадрат увеличения, даваемого глазом, и равно $(d/nr)^2$, где d —глубина глаза, а n —показатель преломления стекловидного тела глаза. Таким образом,

$$E = B \frac{\sigma}{r^2} \left(\frac{nr}{d} \right)^2 = B \frac{\sigma n^2}{d^2},$$

т. е. освещенность сетчатки не зависит от расстояния до фонаря (см. решение задачи 183). О поверхностной яркости фонаря мы судим по освещенности сетчатки. Поскольку последняя не зависит от расстояния до фонаря, одинаковые фонари, находящиеся на разных расстояниях от глаза, должны казаться одинаково яркими. Это заключение справедливо, если можно пренебречь поглощением света в

воздухе, что и было сделано при выводе. При наличии поглощения фонарь кажется тем ярче, чем ближе он находится.

При достаточно большом удалении фонаря величина изображения фонаря на сетчатке благодаря дифракции не зависит от расстояния до него и освещенность сетчатки (если пренебречь поглощением) изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния до фонаря.

$$178. E = \pi B.$$

$$179. E = \pi B.$$

$$180. \alpha_1 = \operatorname{arctg} (k_2/k_1); \alpha_2 = \operatorname{arctg} (k_1/k_2).$$

$$181. B = \frac{4}{\pi} \left(\frac{R}{D} \right)^2 E = 1,5 \cdot 10^9 \text{ кд/м}^2.$$

$$182. E = \pi B/k = 11 \cdot 10^4 \text{ лк.}$$

$$183. E = E_0 \frac{\pi D^2}{4f^2 \alpha^2} = 2,58 \cdot 10^8 \text{ лк.}$$

$$184. \text{ Освещенность уменьшится в } 1 \frac{7}{9} \text{ раза.}$$

$$185. \text{ Приблизительно в } \left(1 - \frac{2d}{D} \right) \frac{n}{n - \sqrt{n^2 - 1}} = 3,4 \text{ раза.}$$

$$186. B = B' \text{ (см. решение задачи 192).}$$

187. Яркость изображения в первом случае не зависит от диаметра линзы, а во втором пропорциональна квадрату диаметра (для параксиальных лучей).

188. 1) 1; 2) 1; 3) 0,25. Вообще яркость $B=1$ при $N \leq D/d$ и $B = \left(\frac{1}{N} \frac{D}{d} \right)^2$ при $N \geq D/d$, где N — увеличение трубы, D — диаметр объектива, а d — диаметр зрачка глаза.

$$189. D = 100 \text{ мм.}$$

190. 1) Четырнадцатая; 2) шестидесятикратное; 3) девятая—девятая.

$$191. \text{ Двадцатой}$$

192. Решение. Рассмотрим произвольную оптическую систему, крайним элементом которой является глаз. Пусть эта система удовлетворяет условию синусов

$$ny \sin u = n'y' \sin u', \quad (192.1)$$

где y и y' — линейные размеры объекта и его изображения на сетчатке глаза, n и n' — показатели преломления пространства предметов и стекловидного тела глаза (на рис. 99 глаз и изображение на сетчатке не показаны). Условие (192.1) должно выполняться для любого угла наклона u , но в дальнейшем под u мы будем понимать угол, образуемый с оптической осью крайними лучами, которые еще могут пройти через оптическую систему и попасть на сетчатку глаза.

Если яркость объекта B постоянна, то световой поток, попадающий в систему, будет

$$\Phi = BS \int_0^u \cos \vartheta \cdot 2\pi \sin \vartheta d\vartheta = \pi BS \sin^2 u,$$

где S — площадь объекта. Световой поток, попадающий в глаз:

$$\Phi' = B'S' \int_0^{u'} \cos \vartheta \cdot 2\pi \sin \vartheta d\vartheta = \pi B'S' \sin^2 u',$$

где B' — яркость изображения, а S' — его площадь. Если пренебречь

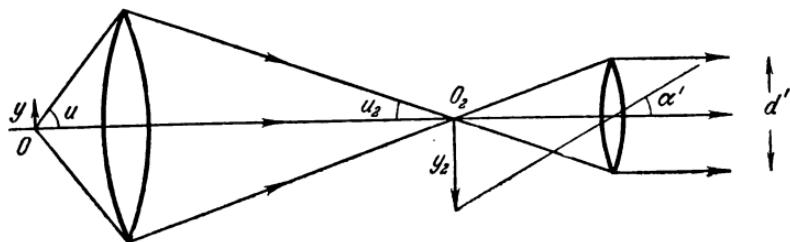


Рис. 99.

потерями света при прохождении через систему, то $\Phi = \Phi'$. Так как $S \sim y^2$, $S' \sim y'^2$, то отсюда и из (191.1) получаем

$$B/n^2 = B'/n'^2. \quad (192.2)$$

Субъективная или зрительная оценка яркости определяется освещенностью сетчатки:

$$E = \frac{\Phi'}{S'} = \pi B' \sin^2 u' = \pi B \frac{n'^2}{n^2} \sin^2 u'. \quad (192.3)$$

Определим ширину пучка d' , вышедшего из O под углом u , непосредственно за окуляром. (Обычно изображение y_2 получается в переднем фокусе окуляра, так что за окуляром пучок световых лучей параллелен.) Так как угол u_2 всегда мал, то

$$d' = 2au_2 = 2a \sin u_2 = \frac{2an \sin u}{y_2} y,$$

где a — расстояние от точки O_2 до передней главной плоскости окуляра, причем мы воспользовались условием синусов для точек O и O_2 . Введем увеличение микроскопа N , равное по определению отношению угла α' , под которым предмет виден в микроскоп, к углу α , под которым он был бы виден невооруженным глазом, если бы был помещен на наименьшем расстоянии ясного зрения L . (Для среднего глаза $L \approx 25$ см.) Считая эти углы малыми, можем написать

$$\alpha = y/L, \quad \alpha' = y_2/a,$$

откуда

$$\frac{y}{y_2} = \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{L}{a} = \frac{1}{N} \cdot \frac{L}{a},$$

Следовательно,

$$d' = 2Ln \sin u/N. \quad (192.4)$$

Следует различать три случая.

Случай 1. Максимальное ограничение светового пучка производит зрачок глаза: d' равно диаметру зрачка d , однако угол u меньше предельного угла u_{\max} , допускаемого апертурой микроскопа. В этом случае угол u' определяется только диаметром зрачка и не зависит от увеличения. Согласно (192.3) не зависит от увеличения освещенность сетчатки E , а с ней и зрительная оценка яркости. Рассматриваемый случай соответствует относительно малому увеличению. Такое увеличение невыгодно, поскольку при нем используется не вся апертура объектива микроскопа. Примером разобранного случая является невооруженный глаз. Здесь зрительная оценка яркости не зависит от расстояния: предметы с одинаковой поверхностной яркостью, помещенные на различных расстояниях, воспринимаются глазом также, как одинаково яркие.

Случай 2. Зрачок глаза и оправа объектива одинаково ограничивают световые пучки: $d' = d$, $u = u_{\max}$. Согласно (192.4) увеличение в этом случае равно

$$N = N_{\text{норм}} = 2Ln \sin u_{\max}/d \quad (192.5)$$

и называется нормальным увеличением. Применение больших увеличений не может повести к увеличению разрешающей способности оптической системы микроскоп — глаз¹⁾. Полагая $d = 2$ мм и $L = 25$ см, получаем

$$N_{\text{норм}} = 250n \sin u_{\max}. \quad (192.6)$$

Случай 3. Максимальное ограничение световых пучков производит оправа объектива: $d' < d$. Угол u' (пропорциональный d') уменьшается в отношении d/d' . В этом же отношении согласно (192.4) увеличивается N . Для освещенности сетчатки (192.3) дает

$$E = E_{\text{норм}} (N_{\text{норм}}/N)^2, \quad (192.7)$$

где $E_{\text{норм}}$ — освещенность при нормальном или меньшем увеличении.

Таким образом, если $N \leq N_{\text{норм}}$, то освещенность сетчатки не зависит от увеличения: если же $N > N_{\text{норм}}$, то она обратно пропорциональна квадрату увеличения.

Освещенность равна: 1) 0,16; 2) 0,0625.

194. 0,13%.

¹⁾ См. Г. С. Ландсберг, Оптика, изд. 5-е, §§ 96, 97, «Наука», 1976.

195. Около 2%.

196. $\bar{E}^2 = 5,8 \cdot 10^{-4}$ СГСЭ; $\bar{E} \approx 0,024$ СГСЭ = 7,2 В/см.

197. $\bar{H}^2 = 5,8 \cdot 10^{-4}$ СГСМ; $\bar{H} \approx 0,024$ Э.

198. $H \approx 0,85$ Э.

§ 3. Интерференция света

199. $\Psi = \varphi \left(t - \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}}{v} \right) = \varphi \left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v} \right)$. Для монохроматической волны $\Psi = \Psi_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \delta)$, где $\mathbf{k} = \frac{\omega}{v} \mathbf{n}$ — волновой вектор.

200. 1) $\Psi = \frac{\varphi(t - R/c)}{R}$; 2) $\Psi = \frac{\varphi(t - r/c)}{\sqrt{r}}$.

202. Когда плоскости колебаний обеих волн взаимно перпендикулярны.

Решение. Рассмотрим сложение колебаний, соответствующих обеим волнам, в некоторой точке пространства. Пусть первое колебание происходит по закону $E_1 = A_1 \cos \omega t$, а второе — по закону $E_2 = A_2 \cos(\omega t + \delta)$. Результирующее колебание будет определяться выражением

$$E = E_1 + E_2 = A_1 \cos \omega t + A_2 \cos(\omega t + \delta),$$

откуда

$$E^2 = A_1^2 \cos^2 \omega t + A_2^2 \cos^2(\omega t + \delta) + 2A_1 A_2 \cos \omega t \cos(\omega t + \delta).$$

Чтобы получить интенсивность I , надо усреднить это выражение по времени. Это дает

$$I = \frac{1}{2} A_1^2 + \frac{1}{2} A_2^2 + 2(A_1 A_2) \overline{\cos \omega t \cos(\omega t + \delta)},$$

где черта означает усреднение по времени. По условию задачи последний член должен обращаться в нуль, каков бы ни был угол δ . Это возможно только тогда, когда $A_1 A_2 = 0$, т. е. колебания должны быть взаимно перпендикулярны.

203. Решение. Возможные комбинации направлений складываемых колебаний представлены на рис. 100. Вероятность каждой комбинации равна $1/8$. Амплитуды результирующих колебаний в первой и пятой комбинациях равны $3A_0$, а во всех остальных A_0 . Соответствующие интенсивности будут $9I_0$ и I_0 , где A_0 и I_0 — амплитуда и интенсивность одного колебания. Для средней интенсивности при сложении всех трех колебаний получим

$$I = (2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 9 + 6 \cdot \frac{1}{8} \cdot 1) I_0 = 3I_0.$$

204. Решение. Интерферирующие волны можно записать в виде

$$\Psi_1 = \Psi_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r} + \delta_1), \quad \Psi_2 = \Psi_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r} + \delta_2).$$

Отсюда

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = 2\Psi_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}r + \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) \cos(\omega t - kr),$$

где $\Delta k = k_1 - k_2$, $k = (k_1 + k_2)/2$. Максимумы интенсивности получаются там, где выражение

$$\cos \Phi = \cos\left(\frac{\Delta k}{2}r + \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right)$$

обращается в максимум. Так как $k_1 = k_2$ и угол φ между векторами k_1 и k_2 мал, то приближенно можно написать

$$|\Delta k| \approx k\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \varphi,$$

откуда для Δx следует приведенное в условии задачи выражение.

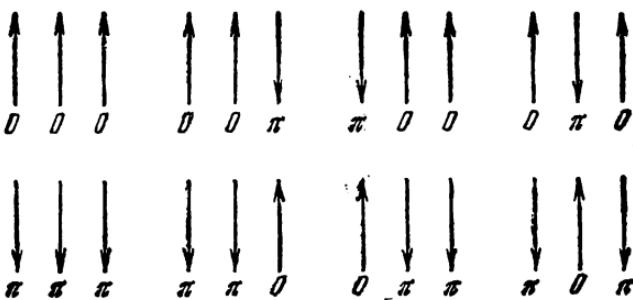


Рис. 100.

205. Примем за ось X линию пересечения плоскости падения с плоскостью экрана. Тогда

$$\Phi = \frac{\pi \varphi x}{\lambda} \cos \vartheta + \frac{\delta_1 - \delta_2}{2},$$

где ϑ — угол падения. При смещении вдоль оси X на ширину полосы Δx величина Φ должна меняться на π , что дает

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\varphi \cos \vartheta}.$$

206. $\lambda = xd/a = 5 \cdot 10^{-5}$ см = 5000 Å.

207. $n_{Cl} = n + N\lambda/l = 1,000865$. Полосы интерференции смещаются в сторону трубки.

208. $\alpha \approx \frac{\lambda(a+r)}{2r\Delta x} \approx 9'10''$.

209. $x \approx \frac{n\lambda(a+r)}{2r\alpha} \approx 2,8$ мм, где n — номер полосы.

$$210. I = I_0 \cos^2 \frac{2\pi x r \alpha}{\lambda (a+r)}.$$

211. Поверхности равной интенсивности: 1) гиперболоиды вращения; 2) гиперболические цилиндры.

$$212. x = m \lambda \frac{a+b}{2a(n-1)\alpha}.$$

$$213. \Delta x = \frac{\lambda}{2(n-1)\alpha} = 0,5 \text{ мм}; \quad N = \frac{4L(n-1)^2\alpha^2}{\lambda} = 10.$$

214. Максимальное число полос $N = l(n-1)\alpha/\lambda = 40$ получится при удалении экрана на $L = \frac{l}{4(n-1)\alpha} = 20$ м от бипризмы. Полосы исчезнут, если удалить экран от бипризмы не менее чем на $2L = 40$ м.

$$215. N = \frac{4ab}{a+b} \frac{(n-1)^2\alpha^2}{\lambda}.$$

216. Решение. Пока источник S находился на оси системы, центр интерференционной картины получался в точке O (рис. 101).

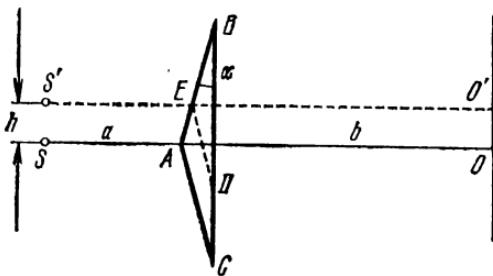


Рис. 101.

Сместим источник вверх на h в положение S' , а затем вообразим, что от бипризмы отрезана часть $ACDE$. Эта часть действует как плоскопараллельная пластинка толщины $d = 2h\alpha$, смещающая картину вниз на $N = d(n-1)/\lambda$ полос. Центр картины из O' переместится вниз на расстояние $x' = N\Delta x$, где $\Delta x = \frac{\lambda}{2(n-1)\alpha} \frac{a+b}{a}$ — ширина полосы. Смещение из O' будет $x' = \frac{N\lambda}{2(n-1)\alpha} \frac{a+b}{a} = \frac{d(a+b)}{2\alpha a}$.

Подставляя значение α , получим $x' = h + hb/a$. Смещение из прежнего центра O будет $x = x' - h = hb/a$.

217. 1) Ширина полос уменьшится в $a/(a-4f)=2$ раза. 2) Ширина полос уменьшится в $a/f=8$ раз.

$$218. d = \frac{\lambda}{(n-1)} \left(m + \frac{1}{4} \right), \text{ где } m = 0, 1, 2, \dots$$

$$219. I = \frac{1}{4} I_0.$$

220. Нет. Световые пучки, идущие от обеих половин билинзы, не перекрываются.

$$a = f\lambda / \Delta x = 0,6 \text{ мм.}$$

222. Интерференционные полосы исчезнут, если удалить экран от билинзы на расстояние не менее $L = Df/a = 50$ м. Максимальное число полос $N = D/(2\Delta x) = 60$ получается при удалении экрана от билинзы на $\frac{1}{2}L = 25$ м.

223. На пути луча SCM надо поместить более тонкую пластинку из того же материала, что и P . Опыт показывает, что ахроматическая полоса в этом случае по-прежнему остается темной.

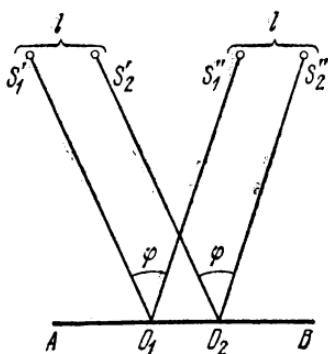


Рис. 102.

224. 1) Пусть источником света служат две одинаковые некогерентные светящиеся точки S_1 и S_2 (или светящиеся линии, параллельные прямой, вдоль которой пересекаются плоскости зеркал Френеля), отстоящие друг от друга на расстояние l . Их мнимые изображения S'_1 и S''_1 , S'_2 и S''_2 расположены так, как указано на рис. 102. Интерференционная картина на экране AB от пары мнимых

источников S'_1 и S''_1 будет смещена относительно интерференционной картины от другой пары источников S'_2 и S''_2 на расстояние O_1O_2 , равное l . Если $l = \frac{1}{2}\lambda/\varphi$, где φ — угловое расстояние между источниками, то максимумы одной интерференционной картины наложатся на минимумы другой, и интерференционные полосы пропадут. Если источником служит светящаяся полоска ширины l , параллельная линии пересечения зеркал, то ее можно мысленно разбить на пары светящихся линий, расстояние между которыми равно $l/2$. В этом случае можно применить рассуждение, приведенное выше, заменив l на $l/2$. Полосы пропадут, когда $l = \lambda/\varphi$. Если источник имеет неправильную форму, то для получения резких интерференционных полос его поперечные размеры в направлении, параллельном линии, соединяющей соответственные изображения в зеркалах Френеля, должны быть малы по сравнению с λ/φ .

2) Размер источника в направлении, перпендикулярном к плоскости зеркала, должен быть мал по сравнению с расстоянием источника до зеркала.

225. Первое исчезновение полос будет при ширине щели

$$b = \frac{\lambda}{a} \frac{x - f}{x} \frac{(L - f)x - Lf}{x} = \frac{L - 3f}{6a} \lambda = 0,58 \text{ мм.}$$

226. $D < \lambda/\alpha \approx 0,05$ мм.

227. $l > fD\alpha/\lambda \approx 100$ см.

228. Пучность: $\lambda/4 = 1,25 \cdot 10^{-5}$ см; узел: $\lambda/2 = 2,5 \cdot 10^{-5}$ см.

229. В первом.

230. Так, чтобы линза давала на экране изображение пленки.

231. Решение. Если бы пластинка была абсолютно прозрачна, а свет строго монохроматичен, то интенсивность отраженного света весьма резко менялась бы при изменении толщины пластинки на величину порядка длины световой волны. Она определялась бы разностью хода между волнами, отразившимися от верхней и нижней поверхностей пластинки. Значит, в случае строгой монохроматичности света и абсолютной прозрачности пластинки при беспрепятственном увеличении толщины последней интенсивность отраженного света действительно периодически изменялась бы с толщиной. Однако в природе не существует ни абсолютно прозрачных сред, ни строго монохроматических волн.

Если среда обладает поглощением, хотя бы и очень малым, то волна, вступившая в пластинку, при достаточно большой толщине последней не достигает нижней поверхности пластинки, а поглотится в ней. В этом случае интенсивность отраженной от пластинки волны будет определяться формулами Френеля.

Для прозрачной пластинки парадокс устраняется, если принять во внимание, что свет, падающий на пластинку, не строго монохроматичен. Действительно, чтобы наблюдалась интерференция между волнами, отразившимися от передней и задней поверхностей пластинки, необходимо, чтобы спектральная область $\Delta\lambda$, занимаемая падающим светом, не превосходила величины $\delta\lambda = \lambda/N$, где N — порядок интерференции. При увеличении толщины пластинки порядок интерференции N растет, а $\delta\lambda$ уменьшается. Значит, поскольку $\Delta\lambda$ конечно, при достаточно большой толщине пластинки интерференция волн, отразившихся от верхней и нижней поверхностей пластинки, не будет наблюдаться. Поэтому при дальнейшем увеличении толщины пластинки интенсивность волны, отраженной от пластинки, не будет изменяться, хотя она и не будет определяться формулами Френеля, поскольку световые волны внутри пластинки претерпевают многократные отражения от ее поверхностей.

В нашем рассуждении молчаливо предполагалось, что падающая волна является плоской в строгом смысле этого слова. Нетрудно показать, что парадокс исчезнет, если отказаться даже только от одного этого предположения и принять строгую монохроматичность света и абсолютную прозрачность материала пластинки.

232. Темной.

Решение. Разность хода между лучом, отразившимся от нижней поверхности пленки, и лучом, отразившимся от ее верхней

поверхности, равна $2dn \cos \psi \pm \lambda/2$. Слагаемое $\lambda/2$ учитывает «потерю полуволны», т. е. поворот фазы на π при отражении от границы пленка — воздух. Первый член достигает максимума $2dn$ при нормальном падении ($\psi = 0$). Полагая $d = 1/10 \lambda$ и $n = 1,3$, получим для разности хода при нормальном падении $(0,26 \pm 1/2) \lambda$. Это соответствует разности фаз приблизительно $(90 \pm 180^\circ)$. Если дальше уменьшать толщину пленки, то разность фаз будет стремиться к $\pm 180^\circ$, и рассматриваемые лучи, интерферируя между собой, почти целиком погасят друг друга.

233. Приблизительно при $d < \lambda/4n = 10^{-5}$ см.

234. Чтобы пленка приобрела зеленоватый цвет, необходимо, очевидно, ослабить синие и красные лучи с длинами волн примерно 0,4 и 0,6 мкм (в воздухе). Этому соответствует толщина пленки около 0,00050 мм.

235. 1) $\Delta x = \lambda/2\alpha = 0,94$ мм.

2) Решение. Допустим сначала, что линия ртути — двойная с двумя длинами волн $\lambda_1 = \lambda$ и $\lambda_2 = \lambda + \Delta\lambda$. Пусть на отрезке x от вершины клина укладывается N интерференционных полос с длиной волны λ_1 и $N - 1/2$ полос с длиной волны λ_2 , т. е. $N\lambda_1 = (N - 1/2)\lambda_2$. Тогда на конце этого отрезка интерференционные максимумы от длины волны λ_1 наложатся на интерференционные минимумы от длины волны λ_2 и интерференционные полосы пропадут. Число N и будет искомым числом полос. Оно равно $N = (\lambda_2/\Delta\lambda)/(\lambda_2 - \lambda_1)$, или, пренебрегая квадратами $\Delta\lambda$, $N = (\lambda_2/\lambda)/\Delta\lambda$. Допустим теперь, что интервал между λ_1 и λ_2 непрерывно и равномерно заполнен длинами волн. Тогда всю спектральную линию можно считать состоящей из двух линий ширины $\Delta\lambda/2$ каждая с расстоянием между ними $\Delta\lambda/2$. К этим двум линиям применимы предыдущие рассуждения. Поэтому число полос N найдется из предыдущего результата заменой $\Delta\lambda \rightarrow \Delta\lambda/2$, что дает $N = \lambda/\Delta\lambda$. Таким образом, считая линию ртути сплошной, находим $N \approx \lambda/\Delta\lambda \approx 54\,600$.

3) $x = N\Delta x \approx 51,3$ м; $h = \lambda^2/2\Delta\lambda \approx 14,9$ см.

4) $\delta\phi \approx \sqrt{(\Delta\lambda/\lambda)\alpha} \approx 0,25^\circ$.

$$236. \alpha = \frac{\lambda}{2\Delta x \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} \approx 12''.$$

$$237. \alpha = \frac{\lambda}{2n \Delta x} \approx 8''.$$

238. $N \approx (L/d)^2 = 2500$, $\Delta\lambda/\lambda \approx 1/N = 4 \cdot 10^{-4}$.

239. $N \approx (nL/d)^2 \approx 5600$.

$$240. E \sim 4I_0 \sin^2 \frac{2\pi x\alpha}{\lambda}, \text{ где } x \text{ — расстояние от ребра клина.}$$

241. При отражении света на границе стекло—воздух электрический вектор не испытывает изменения фазы, а при отражении на границе воздух—стекло меняет фазу на 180° .

242. Решение. Каково бы ни было расположение линз, свет либо теряет полволны при отражении на обеих границах раздела масла с поверхностями линз, либо совсем не теряет. Поэтому разность хода между лучами, отразившимися от поверхностей линз в месте их соприкосновения, равна нулю. Эти лучи при интерференции усиливают друг друга. Поэтому центр колец в отраженном свете светлый, а в проходящем — темный.

243. В обоих случаях будут наблюдаться две системы полуколец, примыкающих друг к другу. В одной системе центр темный, в другой — светлый. Картина в проходящем свете будет дополнительной по отношению к картине в отраженном свете. (Ср. с решением предыдущей задачи.)

$$244. \Delta l = 0,32 \text{ мм.}$$

$$245. f = 137 \text{ см.}$$

$$246. R = 1 \text{ м; } \lambda_{kp} = 0,7 \text{ мкм.}$$

$$247. f = \frac{r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \frac{1}{(n - 1) m \lambda} = 54 \text{ см.}$$

$$248. r = \sqrt{R \lambda / n} = 0,63 \text{ мм.}$$

$$249. r_m = \sqrt{\frac{m \lambda}{1/R_1 + 1/R_2}}.$$

$$250. r_m = \sqrt{\frac{m \lambda}{1/R_1 - 1/R_2}}.$$

251. Решение. Каждое кольцо Ньютона можно определить как линию, вдоль которой разность хода между интерферирующими лучами постоянна. Легко видеть, что при удалении линзы от пластиинки «кольца постоянной разности хода» будут сжиматься к центру картины, а при приближении — расширяться от центра. Центр картины попеременно будет темным и светлым.

252. Решение. Двум длиnam волн соответствуют две системы колец Ньютона с незначительно отличающимися размерами. Если линза соприкасается с поверхностью пластиинки, то в центре картины светлые (темные) кольца одной системы практически совпадают со светлыми (темными) кольцами другой системы. Поэтому вблизи центра кольца видны почти так же резко, как при монохроматическом свете. Но при некотором удалении от центра светлое кольцо одной системы может совпасть по положению с темным кольцом другой системы. В соответствующем месте кольца Ньютона не будут видны, а в окрестности этого места они будут видны не резко.

Определим номер N светлого кольца для длины волны λ_2 , которое совпадает по положению с $(N+1)$ -м темным кольцом для длины

волны λ_1 . Первому темному кольцу (точнее, центральному темному пятну) для длины волны λ_1 соответствует разность хода $\lambda_1/2$, второму темному кольцу — разность хода $\lambda_1 + \lambda_1/2$ и т. д., наконец, ($N+1$)-му темному кольцу — разность хода $N\lambda_1 + \lambda_1/2$. Та же разность хода $N\lambda_1 + \lambda_1/2$, очевидно, должна равняться $N\lambda_2$, так как должно происходить наложение N -го светлого кольца для длины волны λ_2 на ($N+1$)-е темное кольцо для длины волны λ_1 . Итак,

$$N\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{2} = N\lambda_2, \text{ откуда } N = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{5890}{12} \approx 490.$$

Отсюда следует, что кольца пропадут в окрестности четырехъярусного кольца. Легко видеть, что они опять будут резкими в окрестности $2 \cdot 490 = 980$ -го кольца. При удалении линзы от пластинки кольца стягиваются к центру (см. решение предыдущей задачи). Если линзу переместить на $490\lambda_1$, то через поле зрения пройдет 490 колец, и в центре картины кольца исчезнут. При перемещении линзы на $2 \cdot 490\lambda_1 = 980\lambda_1$, кольца в центре снова будут резкими; при перемещении на $3 \cdot 490\lambda_1 = 1470\lambda_1$ — опять пропадут и т. д.

253. $\Delta\lambda/\lambda = 1/980; \Delta\lambda = 6,02 \text{ \AA}$.

254. Кольца равного наклона с центром F . При наклоне пластинки кольца становятся эллиптическими. Центр картины в точке схождения параллельных лучей, падающих на пластинку нормально. При наклоне пластинки на угол α центр картины смещается на $x = f \tan \alpha \approx f\alpha \approx 5,3 \text{ см}$.

255. Решение. Разность хода между лучами, отразившимися от передней и задней поверхностей пластинки, равна $2dn \cos \psi + \lambda/2$. Так как центр колец темный, то эта величина должна содержать нечетное число полуволн. Первому темному кольцу соответствует такое приращение угла преломления ψ , что разность хода уменьшается на λ . Это дает $2dn(1 - \cos \psi) = \lambda$, или $4dn \sin^2(\psi/2) = \lambda$. Для малых углов $dn \psi^2 = \lambda$. Малые углы падения и преломления связаны соотношением $\phi = n\psi$. Таким образом, $\phi^2 = n\lambda/d$. Для радиуса первого темного кольца получаем $r = f\phi = f\sqrt{n\lambda/d} = 9,5 \text{ мм}$. Величина $\Delta\lambda$ находится обычным способом по порядку интерференции, который равен $2dn/\lambda$. Это дает $\Delta\lambda = \lambda^2/(2dn) = 0,75 \text{ \AA}$.

256. Решение. Максимальный угол падения $\Phi_{\max} = D/6f$. Поэтому из результатов решения предыдущей задачи получаем $N = \frac{dD^2}{36nf^2\lambda} = 2$.

257. $d_{\min} = 36nf^2\lambda/D^2 = 0,81 \text{ мм}$.

258. Амплитуда излучателя 3 должна быть в $\sqrt{2}$ раз больше амплитуд излучателей 1 и 2. Минимумы нулевой интенсивности направлены под углами $\vartheta = \pm 60^\circ$ к линии источников 123.

259. Амплитуда излучателя 3 должна быть такой же, что и амплитуды излучателей 1 и 2. Минимумы нулевой интенсивности направлены под теми же углами, что и в предыдущей задаче.

260. Условие максимумов:

$$\frac{4\pi h \cos \vartheta}{\lambda} + \pi = 2m\pi, \quad \text{или} \quad 4h \cos \vartheta = (2m-1)\lambda$$

условие минимумов:

$$2h \cos \vartheta = m\lambda,$$

где m —целое число, а ϑ —угол между нормалью к идеально отражающей плоскости и направлением излучения (рис. 103). Угол ϑ может меняться в пределах от $-\pi/2$ до $+\pi/2$.

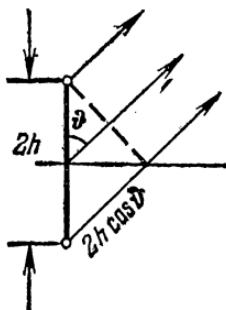


Рис. 103.

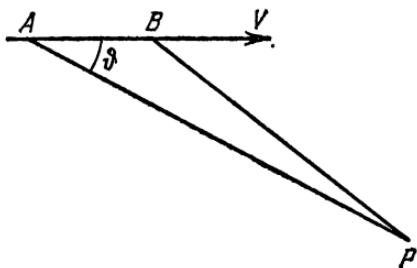


Рис. 104.

$h = 1/\lambda$. Максимум: $\vartheta = 0^\circ$; минимумы: $\vartheta = \pm 90^\circ$.

$h = 1/2\lambda$. Максимумы: $\vartheta = \pm 60^\circ$; минимумы: $\vartheta = 0^\circ, \pm 90^\circ$.

$h = 3/4\lambda$. Максимумы: $\vartheta = 0^\circ, \pm 70,5^\circ$; минимумы: $\vartheta = \pm 48,3^\circ, \pm 90^\circ$.

$h = \lambda$. Максимумы: $\vartheta = \pm 41,5^\circ, \pm 75,5^\circ$; минимумы: $\vartheta = 0^\circ, \pm 60^\circ, \pm 90^\circ$.

261. Решение. Обозначим через V скорость электрона относительно среды, а через v —фазовую скорость света в среде. Движущийся электрон своим полем возмущает молекулы или атомы среды, благодаря чему они становятся источниками световых волн. Пусть A и B —произвольные точки среды на пути движения электрона, а P —достаточно удаленная точка наблюдения (рис. 104). Пусть в момент времени $t=0$ световая волна, возбужденная электроном, вышла из A . В точку наблюдения P она придет в момент времени $t_1 = AP/v$. Такая же волна выйдет из B позднее на время AB/V . В точку наблюдения P она придет в момент времени $t_2 = AB/V + BP/v$. Разность времен, таким образом, равна

$$t_2 - t_1 = \frac{AB}{V} - \frac{AP - BP}{v}.$$

Для достаточно удаленной точки P можно положить $AP - BP = AB \cos \vartheta$.

Итак,

$$t_2 - t_1 = \frac{AB}{v} \left(\frac{v}{V} - \cos \vartheta \right).$$

Если $v/V - \cos \vartheta \neq 0$, то каждой точке A можно привести в соответствие такую точку B , что волны, вышедшие из A и B , придут в P в противоположных фазах и погасят друг друга. Если же

$$\cos \vartheta = v/V, \quad (261.1)$$

то при любом положении точек A и B волны, вышедшие из них, придут в P одновременно и будут усиливать друг друга. Следова-

тельно, в направлении, определяемом условием (261.1), электрон будет излучать. Излучение возможно лишь при $V > v$, т. е. когда скорость электрона превосходит фазовую скорость света в среде.

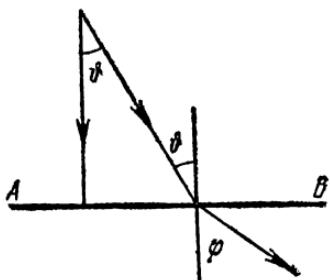


Рис. 105.

262. Черенковское излучение происходит под углом ϑ к направлению полета частицы, который определяется условием $\cos \vartheta = 1/n\beta$, причем $c\beta$ — скорость частицы. Для возможности излучения необходимо

$n\beta > 1$. Чтобы излучение могло выйти из блока, на границе AB (рис. 105) не должно быть полного отражения, т. е. $n \sin \vartheta < 1$, откуда $\beta^2(n^2 - 1) < 1$. Интервал регистрируемых скоростей определяется неравенством $\frac{1}{n^2} < \beta^2 < \frac{1}{n^2 - 1}$. Чтобы релятивистские частицы ($\beta \approx 1$) не регистрировались, должно быть $n > \sqrt{2}$.

§ 4. Дифракция света

263. 1) $r_m \approx \sqrt{abm\lambda/(a+b)}$; 2) $r_1 = 0,15$ см.

264. 1) $r_m \approx \sqrt{bm\lambda}$; 2) $r_1 = 0,212$ см.

265. $r_m \approx \sqrt{abm\lambda/|a-b|}$.

266. На расстоянии 1,2 м.

267. $f = 90$ см; $r_1 = 0,672$ мм. Изображения, т. е. максимумы, расположенные на оси пластиинки, отодвинутся от последней.

268. $I \approx 4I_0$.

269. $I \approx I_0$.

270. $I \approx I_0$.

271. $y' = \frac{b}{a} y = 10,5$ мм. Опыт был поставлен Полем с параметрами, указанными в задаче. Чтобы опыт удался, необходимо, чтобы

глубина неровностей h удовлетворяла условию $h < \frac{\lambda}{D} \frac{ab}{a+b} = 180\lambda \approx 0,1$ мм. Шар можно заменить диском при условии $y < \frac{2a}{D} \sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}} \approx 1$ м. Соответствующий опыт был поставлен Ангерером.

$$272. h = \frac{2m+5/4}{2(n-1)} \lambda, \text{ где } m=0, 1, 2, \dots$$

273. Решение. Если E_1, E_2, E_3 — поля, создаваемые в точке A последовательными полными зонами Френеля, то искомое поле E в точке A представится рядом

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}(E_1 + E_2 + \dots + E_{N-1})}_{\text{четное число}} + \frac{1}{2}E_N + (E_{N+1} + E_{N+2} + \dots).$$

При небольшом N первая скобка близка к нулю, а последняя — к $\frac{1}{2}E_{N+1}$, так что

$$E \approx \frac{1}{2}(E_N + E_{N+1}) \approx 0.$$

В точке A будет минимум освещенности.

274. При четном N в точке A будет минимум освещенности ($E=0$), при нечетном N — максимум, приблизительно такой же, как при одной открытой центральной зоне.

275. Решение. Колебание, вызываемое всеми зонами Френеля, изображается вектором \vec{OC} (рис. 106), колебание от одной трети первой

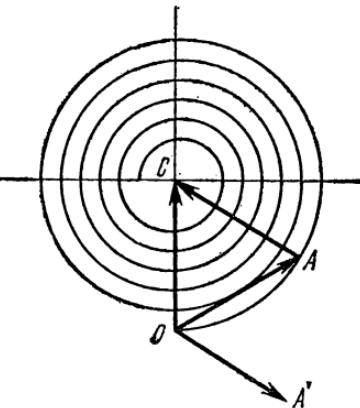


Рис. 106.

зоны — вектором \vec{OA} . Вектор \vec{AC} представляет колебание, вызываемое волнами, отразившимися от внешней части экрана, расположенной за отверстием CD (рис. 33). Эти три вектора образуют равносторонний треугольник, если пренебречь уменьшением радиуса витка спирали на одном обороте. При смещении центрального круга к источнику на $\lambda/12$ фаза отраженной им волны увеличится на $2 \cdot 2\pi/12 = \pi/3$, и колебание изобразится вектором, равным и противоположно направленным вектору \vec{AC} . Интенсивность всей отраженной волны в точке S обратится в нуль. При смещении круга CD в противоположную сторону фаза колебания \vec{OA} уменьшится на $\pi/3$ и вектор \vec{OA} повернется в положение \vec{OC} . Результирующее колебание най-

дется сложением векторов \vec{AC} и \vec{OC} . Таким путем найдем, что амплитуда колебания в точке S увеличится в $\sqrt{3}$ раз, а интенсивность — в три раза.

276. $h = \frac{3}{8}\lambda$.

277. Энергия перераспределяется, причем в одних точках плоскости изображения плотность светового потока возрастает, а в дру-

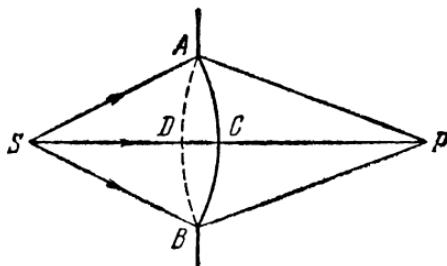


Рис. 107.

гих убывает. Весь поток через плоскость изображения возрастает в 2 раза.

278. $r = \sqrt{\frac{m\lambda}{1/a + 1/b}}$. Центр колец темный, если m — четное число, и светлый, если m — нечетное число.

Решение. Освещенность в центре дифракционной картины можно найти, разбивая волновую поверхность ACB (рис. 107) на зоны Френеля. Если в ней уложится четное число зон Френеля, то в P получится минимум освещенности; если нечетное — максимум. Построим сферу радиуса PA с центром в P . Число зон Френеля на волновой поверхности ACB , очевидно, равно длине CD , деленной на $\lambda/2$. Отсюда легко получить результат, приведенный в ответе.

279. $r = \sqrt{\frac{m\lambda}{|1/f - 1/a|}}$. Центр колец темный, если m — четное число, и светлый, если m — нечетное число.

Решение. Метод решения такой же, как и предыдущей задачи. Разница только в том, что теперь сферическая волна не расходится, как было раньше, а сходится в точке S (рис. 108). Зоны Френеля для точки P строятся поэтому с вогнутой стороны сферической волновой поверхности. Число зон, укладывающихся в отверстии диафрагмы, будет равно длине CD , деленной на $\lambda/2$.

280. $a = A/n^2 = 10$ м, $b = B/n^2 = 20$ м.

281. Центр колец будет темный.

Решение. Построение зон Френеля для расходящейся сферической волновой поверхности (рис. 109) показывает, что при свобод-

ном распространении волны действие всей волны в точке P равно половине действия центральной зоны и что вторичные источники Гюйгенса должны опережать по фазе световые колебания на волновой поверхности ACB на $\pi/2$. Если бы это было не так, то мы получили бы неправильное значение фазы колебаний в точке P . Допустим, например, что вторичные источники Гюйгенса на волновой

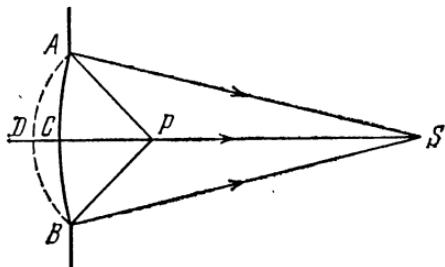


Рис. 108.

поверхности совпадают по фазе со световыми колебаниями на ней. Пусть C_1CC_1' — центральная зона Френеля. Поскольку волны, идущие в P из центра этой зоны, проходят меньшее расстояние, чем волны,

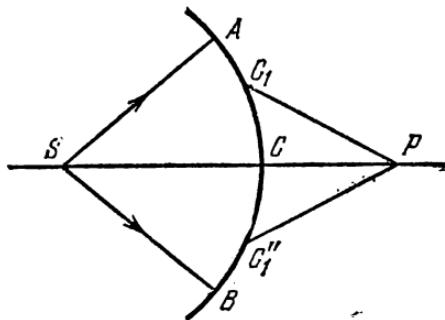


Рис. 109.

идущие из ее краев, расчет по методу зон Френеля дал бы неправильное значение фазы колебаний в точке P , а именно на $\pi/2$ меньше истинного. Чтобы такую ошибку устранить, достаточно увеличить фазы вторичных источников на $\pi/2$ по сравнению с фазой световых колебаний на волновой поверхности ACB .

Построение зон Френеля, разумеется, сохраняет смысл и для сходящейся сферической волны (рис. 110). Понятно, что в этом случае фазы вторичных источников Гюйгенса также должны опережать фазы световых колебаний на сферической волновой поверхности на $\pi/2$. Пока точка наблюдения лежит между серединой центральной френелевской зоны

левой зоны и центром S сферической волновой поверхности, мы не получаем ничего существенно нового: колебания приходят в эту точку раньше от середины центральной зоны, чем от ее краев.

Дело меняется, когда точка наблюдения P (рис. 110) отстоит от середины центральной зоны дальше центра S . Теперь колебания, приходящие в S от краев центральной зоны, будут опережать по фазе колебания, приходящие из ее середины, на π , а результирующее колебание всей центральной зоны придет с опережением на $\pi/2$. Если учесть еще опережение по фазе вторичных источников Гюйгенса, то мы придем к заключению, что при прохождении сферической

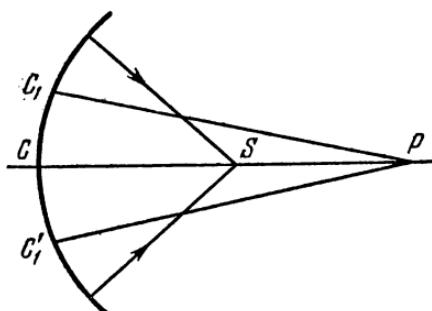


Рис. 110.

волны через ее центр фаза колебаний как бы меняется скачком на π . Благодаря этому волновое поле нигде не обращается в бесконечность. Действительно, сходящаяся сферическая волна сначала стягивается в точку S , а затем становится расходящейся. Получается наложение двух сферических волн, из которых одна распространяется к центру, а другая от центра. Эти волны в центре S имеют противоположные фазы, благодаря чему там не получается бесконечно больших амплитуд колебаний, как это было бы при всяком ином соотношении фаз.

Все эти выводы, строго говоря, относятся к случаю свободного распространения сферических волн. Когда волна ограничена диафрагмой, они остаются также справедливыми, если только точка наблюдения P находится не слишком близко от фокуса геометрического схождения лучей. В окрестности фокуса наблюдается сложное распределение амплитуд и фаз светового поля. Но если исключить из рассмотрения эту окрестность, то окажется, что окончательный результат получится такой же, как если бы фаза волны при переходе через фокус увеличивалась скачком на π .

Теперь решение задачи очевидно. Сферическая волна, идущая снизу (рис. 34), проходит через фокус S'' прежде, чем она попадает

на экран. Волна же, идущая сверху, попадает на экран, не проходя через свой фокус S' .

282. Решение. Если r — радиус отверстия, то разность хода между лучами, приходящими от его края и от центра, равна $r^2/2L$, где L — расстояние от центра отверстия до точки наблюдения. Положим сначала $r=r_1$, а затем $r=r_1(1-\alpha)$, где r_1 — радиус центральной зоны Френеля. Тогда соответствующие разности фаз будут π и $\delta=\pi(1-\alpha)^2$. Как видно из векторной диаграммы (рис. 111),

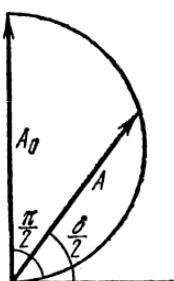


Рис. 111.

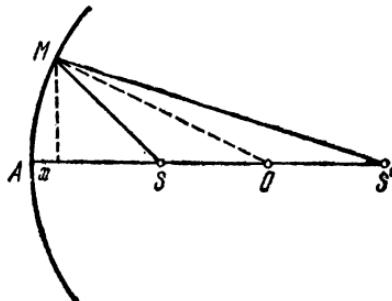


Рис. 112.

амплитуды колебаний A_0 и A в рассматриваемых двух случаях связаны соотношением $A=A_0 \sin(\delta/2)$, а интенсивности — соотношением $I=I_0 \sin^2(\delta/2)$. При $\alpha=1/3$

$$I=I_0 \sin^2(2\pi/9) \approx I_0 \sin^2 40^\circ \approx 0,41 I_0.$$

283. Решение. Как видно из рис. 112, $SM^2=(a-x)^2+r_m^2$. Извлекая квадратный корень и пренебрегая квадратом малого отрезка x , находим $SM \approx a+r_m^2/2a-x$. Аналогично, $MS' \approx b+r_m^2/2b-x$. Далее, $x \approx r_m^2/2R$. Радиус m -й зоны определится из условия $|SM+MS'-(SA+AS')|=m\lambda/2$. Подставляя сюда вычисленные значения, получим

$$r_m^2 = \frac{m\lambda}{\left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{R} \right|}.$$

Результат можно получить проще, если заметить, что в принятом приближении зоны Френеля можно строить не на поверхности зеркала, а на поверхности сходящейся волны, отразившейся от зеркала. Радиус кривизны этой поверхности a' найдется по формуле зеркала $\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} - \frac{2}{R} = 0$. Для определения r_m теперь достаточно заменить в ответе к задаче 278 величину a на a' .

284. Решение. Разность хода $(SMS')-(SAS')$ (рис. 112), возникающая при отражении лучей от соседних зон Френеля, равна

нулю для изображения нулевого порядка и $\pm \lambda/2$ для изображений ± 1 -го порядков. При отражении от центральной и m -й зон она в m раз больше. Из этого условия получаем

$$\frac{r_m^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{R} \right) = m \frac{\lambda}{2}.$$

Полагая здесь $|m|=4$, находим $b_0 \approx 1,33$ см, $b_{+1}=80$ см, $b_{-1}=400$ см.

$$285. r_m = \left[\frac{m\lambda R}{b_1 - b_2} (R + \sqrt{R^2 + (b_1 - b_2)^2}) \right]^{1/2} \approx 0,7 \text{ см. } (m=5).$$

$$286. 1) b_m = r^2/m\lambda.$$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_m , см	200	100	66	50	40	33	29	25	22	20

2) См. рис. 113. 3) $\Delta b = 200$ см.

$$287. \Delta b = \frac{8b_1^2\lambda}{D^2 - 8b_1\lambda} = 18 \text{ см.}$$

288. Решение. При свободном распространении волны интенсивность света в точке A (рис. 114) представляется выражением $I = I_0 \left(\frac{a}{a+b} \right)^2$, где I_0 — интенсивность в центре O , a — расстояние

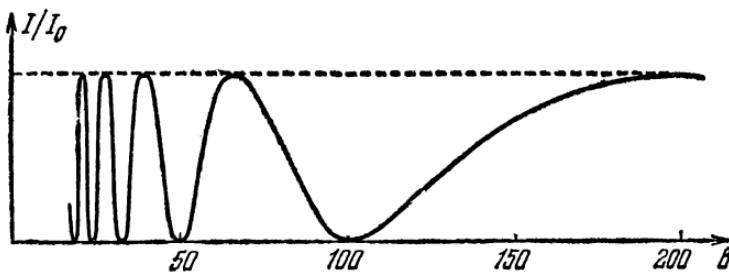


Рис. 113.

от источника S до точки O , b — расстояние от O до A . Наличие диафрагмы, как в этом легко убедиться с помощью векторной диаграммы (рис. 111), приводит к появлению множителя $4 \sin^2(\delta/2)$, где $\delta = \pi R^2 (1/a + 1/b)$ — разность фаз между осевыми и крайними лучами, R — радиус диафрагмы. Таким образом, при наличии диафрагмы интенсивность в точке A будет $I = 4I_0 \left(\frac{a}{a+b} \right)^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}$. Приравни-

вая производную этого выражения по b нулю, находим условие экстремума $\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = -\frac{a}{b} \frac{\delta}{2}$. По условию задачи экстремуму соответствует $a=b$, т. е. $\operatorname{tg} (\delta/2) = -\delta/2$. Решая это уравнение графически, находим $\delta/2 = 2,03$. Искомое число зон Френеля будет $m = \delta/\pi = 1,3$.

289. Основной фокус есть точка, для которой зоны, начерченные на пластинке, совпадают с зонами Френеля. Если r —радиус первой зоны, начертанной на пластинке, то основной фокус определяется выражением $f_0 = r^2/\lambda$. Следующие фокусы получаются, когда в первой зоне, начертанной на пластинке, укладывается 3, 5, ..., ..., $2k+1$, ... зон Френеля, т. е. когда $r^2/f_k = (2k+1)\lambda$. Следовательно, $f_k = \pm f_0/(2k+1)$, где $k=0, 1, 2, \dots$ Знаку плюс соответствуют действительные, а минусу—мнимые фокусы.

290. Фокусы пластинки различных порядков: $f_k = \frac{ab}{(a+b)(2k+1)}$, где $k=0, 1, 2, \dots$ Положения всех изображений определяются формулой $\frac{1}{a} + \frac{1}{b_k} = \frac{1}{f_k}$.

291. Решение. Допустим сначала, что источник света S точечный, а зонная пластинка CD наклонена к его оптической оси под углом $\pi/2 - \alpha$ (рис. 115). Из рисунка видно $x^2 = a^2 + R^2 + 2aR \sin \alpha$. Извлекая квадратный корень и пренебрегая всеми степенями радиуса R , начиная с третьих, получим

$$x = a + R \sin \alpha + \frac{R^2 \cos^2 \alpha}{2a}.$$

Аналогично,

$$y = b - R \sin \alpha + \frac{R^2 \cos^2 \alpha}{2b}.$$

Отсюда для разности хода между лучами SCA и SOA находим

$$\Delta = (x+y) - (a+b) = \frac{R \cos^2 \alpha}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right),$$

или $\Delta = \Delta_0 - \delta\Delta$, где Δ_0 —значение Δ при отсутствии наклона зонной пластинки, а $-\delta\Delta$ —приращение величины Δ , обусловленное

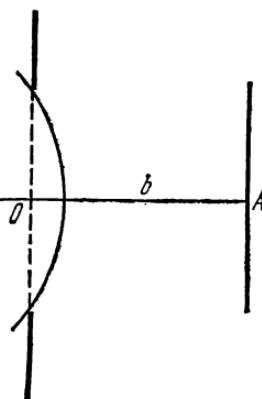


Рис. 114.

наклоном:

$$\delta\Delta = \Delta_0 (1 - \cos^2 \alpha) = \Delta_0 \sin^2 \alpha \approx \Delta_0 \alpha^2.$$

Если $\delta\Delta \ll \lambda$, то наклон пластиинки не скажется существенно на работе зон, расположенных в пределах круга радиуса R . Если же $\delta\Delta \approx \lambda/2$, то все зоны, расположенные выше этого круга, становятся бесполезными и даже вредными. Из этого условия находится предельное значение разности хода $\Delta_0 \approx \lambda/(2\alpha^2)$. Соответствующее число зон Френеля будет

$$N \approx \Delta_0 / (\lambda/2) \approx 1/\alpha^2.$$

Допустим теперь, что фотографируемый предмет не точечный, причем его центр расположен на оси зонной пластиинки. Для периферийных точек предмета, не лежащих на оси пластиинки, последняя действует как наклонная под углом α . Поэтому предельное число

зон Френеля, при котором должно получиться наиболее отчетливое изображение, будет $N \sim 1/\alpha^2 \sim 400$.

292. $I = I_0 \{1/4 + 2 \sin^2(\delta/2)\}$, где I_0 — интенсивность света в отсутствие экрана, $\delta = \pi r^2/b\lambda$ — разность фаз между лучами, пришедшими в точку наблюдения от краев и центра углубления. Подставляя численные значения, получим $\delta = \pi/2$, $I = 5/4 I_0$. Интенсивность увеличится в 5 раз.

293. $d^2 \ll \lambda r$.

294. $\phi \approx \sqrt{\lambda/b} = 3,6 \cdot 10^{-8}$ рад = $0,0075''$, $h \leq \sqrt{b\lambda} = 14$ м. Угол ϕ получен в предположении, что можно измерить угловое расстояние между двумя точечными звездами, когда дифракционные картины от них сдвинуты друг относительно друга на величину порядка ширины полосы. Указанный предел может быть уменьшен приблизительно раз в десять.

295. $a(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = m\lambda$, где a — ширина щели, α — угол скольжения, соответствующий минимуму, а m — целое число (положительное или отрицательное).

296. Квадрат со стороной $L = 3,5$ см.

297. Решение. Согласно принципу Гюйгенса — Френеля напряженность поля волны E_1 , дифрагировавшей на первом экране, представляется некоторым интегралом по отверстиям этого экрана. Напряженность поля волны E_2 , возникшей при дифракции на дополнительном экране, представляется таким же интегралом по отверстиям этого экрана. Сумма $E_1 + E_2$ представляется интегралом

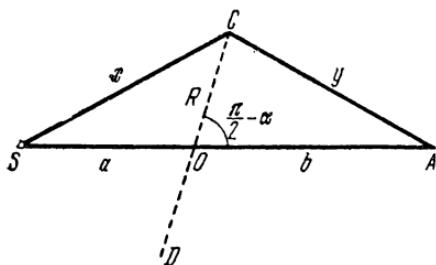


Рис. 115.

по всей бесконечной плоскости, в которой расположены рассматриваемые экраны. Но таким же интегралом представилось бы поле за экраном, если бы этого экрана совсем не было, т. е. волна распространялась свободно. Следовательно, $E_1 + E_2 = E$, где E — напряженность поля волны в отсутствие экрана, т. е. поля падающей волны. Но в падающей волне свет распространяется только в одном направлении. Для всех других направлений $E = 0$, а следовательно, $E_1 + E_2 = 0$, откуда $E_1^2 = E_2^2$, или $I_1 = I_2$.

298. Решение. Рассмотрим щель той же ширины, что и черный экран. Если на щель и экран падает одна и та же плоская волна, то количество энергии, поглощенной экраном, будет равно количеству энергии, падающей на щель. Согласно принципу Бабине интенсивности света во всех направлениях, за исключением направления падающей волны, в обоих случаях одинаковы. Следовательно, одинаковы и энергии, рассеянные экраном и щелью. Но в случае щели вся энергия рассеивается. Значит, энергия, поглощенная экраном, равна энергии, рассеянной им.

$$299. d |n_2 - n_1| = (m + \frac{1}{2})\lambda; m = 0, 1, 2, \dots$$

$$300. \text{Нулевой максимум } \sin \vartheta = n \sin \alpha, \text{ минимумы}$$

$$b (\sin \vartheta - n \sin \alpha) = m\lambda; m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$301. I = C \left[\frac{\sin \left(\frac{N\pi d}{\lambda} \sin \vartheta \right)}{\sin \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \vartheta \right)} \right]^2 \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \vartheta \right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \vartheta} \right]^2, \quad (301.1)$$

где C — постоянная, а ϑ — угол между нормалью к решетке и заданным направлением, к которому относится интенсивность I .

Решение. Так как требуется рассчитать распределение интенсивности в дифракционной картине Фраунгофера на решетке, то можно считать, что экран, на котором наблюдается эта картина, отодвинут достаточно далеко. Лучи, приходящие из различных щелей решетки в любую точку экрана, можно считать параллельными. Выберем такую точку на экране, чтобы приходящие в нее лучи образовывали угол ϑ с нормалью к решетке. Разность фаз между соседними интерферирующими лучами будет равна $\delta = 2\pi d \sin \vartheta / \lambda$. На векторной диаграмме колебание, приходящее в рассматриваемую точку от какой-либо щели решетки, можно изобразить вектором. Эти векторы образуют ломаную линию с равными звеньями и равными углами (рис. 116). Результирующее колебание изобразится геометри-

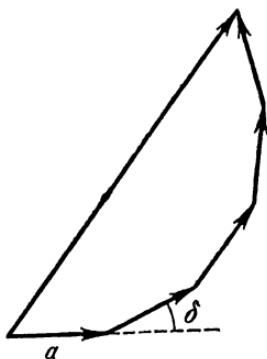


Рис. 116.

ческой суммой всех этих векторов. Сложение векторов на плоскости формально тождественно со сложением комплексных чисел. Если первый вектор изобразить комплексным числом a , то последующие изобразятся комплексными числами $ae^{j\delta}, ae^{2j\delta}$ и т. д. Их сумма равна

$$A = a [1 + e^{j\delta} + e^{2j\delta} + \dots + e^{j(N-1)\delta}] = a \frac{1 - e^{jN\delta}}{1 - e^{j\delta}},$$

Квадрат модуля комплексного числа A дает относительную интенсивность света в рассматриваемой точке экрана:

$$\begin{aligned} I = |A|^2 &= AA^* = |a|^2 \frac{1 - e^{jN\delta}}{1 - e^{j\delta}} \frac{1 - e^{-jN\delta}}{1 - e^{-j\delta}} = \\ &= |a|^2 \frac{2 - (e^{jN\delta} + e^{-jN\delta})}{2 - (e^{j\delta} + e^{-j\delta})} = |a|^2 \frac{1 - \cos(N\delta)}{1 - \cos\delta}. \end{aligned}$$

Так как $|a|^2$ определяет интенсивность дифрагированного света на одной щели, то по известной формуле

$$|a|^2 = C \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin\theta\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin\theta} \right]^2.$$

Подставляя это значение в предыдущее выражение, легко получить ответ. Постоянная C пропорциональна интенсивности падающего света и квадрату ширины щели b . Ни от каких других параметров решетки она не зависит.

302. Решение. Представим формулу (301.1) в виде

$$I(\theta) = Cb^2 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta} \right)^2, \quad (302.1)$$

где $\alpha = \pi b \sin\theta/\lambda$, $\beta = \pi d \sin\theta/\lambda$, а постоянная C от параметров решетки не зависит. Подставляя значение α , получим

$$I(\theta) = C\lambda^2 \frac{\sin^2\alpha}{\pi^2 \sin^2\theta} \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta} \right)^2.$$

Для дополнительной решетки

$$I'(\theta) = C\lambda^2 \frac{\sin^2\alpha'}{\sin^2\theta} \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta} \right)^2,$$

где $\alpha' = \pi(d-b) \sin\theta/\lambda$, так что $\alpha + \alpha' = \pi d \sin\theta/\lambda = \beta$. Для главных максимумов $d \sin\theta = m\lambda$, $\alpha + \alpha' = m\lambda$. Поэтому $\sin^2\alpha = \sin^2\alpha'$, и следовательно, $I'_\text{гл} = I_\text{гл}$. При $m=0$ рассуждение неприменимо, так как в этом случае в знаменателе $\sin\theta = 0$. Допустим теперь, что θ не есть угол на главный максимум. При больших значениях N главные максимумы очень резкие. Практически весь свет концентрируется в главных максимумах, занимающих очень узкие интервалы углов $\Delta\theta$, стремящиеся к нулю при $N \rightarrow \infty$. Практическое значение имеют

только углы, удовлетворяющие условию $d \sin \vartheta = m\lambda$, а также углы, отличающиеся от них ничтожно мало, а в этих случаях применимо доказательство, приведенное выше.

303. $b/d = 1/4$ или $b/d = 3/4$ (см. предыдущую задачу).

304. Решение. Введем обозначения $q = b/d$, $(d-b)/d = 1-q$. Суммарный поток энергии прошедшего света, распределяющийся по всем максимумам, пропорционален q , интенсивность нулевого максимума пропорциональна q^2 , а потому

$$\frac{I_{\text{прош}}}{q} = \frac{I'_{\text{прош}}}{q'}, \quad \frac{I_0}{q^2} = \frac{I'_0}{q'^2}.$$

По теореме Бабине для дополнительных решеток $I_{\text{диф}} = I'_{\text{диф}}$. Кроме того, $I_{\text{прош}} = I_0 + I_{\text{диф}}$. Исключив из написанных соотношений $I'_{\text{диф}}$ и I'_0 , найдем $I_{\text{диф}} = (1-q) I_{\text{прош}}$. Учитывая также, что $I_{\text{прош}} = q I_{\text{пад}}$, получим $I_{\text{диф}} = q(1-q) I_{\text{пад}}$. Максимум для $I_{\text{диф}}$ получается при $q = 1/2$. При этом $I_{\text{диф}} = 1/4 I_{\text{пад}}$.

305. $N d \sin \vartheta = n\lambda$, но $d \sin \vartheta \neq k\lambda$, $b \sin \vartheta = m\lambda$, где n, m, k — целые числа. Условие минимума — выполнение хотя бы одного из этих равенств.

306. $d(\sin \vartheta - \sin \vartheta_0) = n\lambda$. Если $d \gg n\lambda$, то условие максимума принимает вид $d \cos \vartheta_0 (\vartheta - \vartheta_0) \approx n\lambda$, т. е. постоянная решетка как бы уменьшилась по сравнению со случаем нормального падения и стала равной $d \cos \vartheta_0$ вместо d . При этом углы $\vartheta - \vartheta_0$, определяющие направления на максимумы, отсчитываются от направления падающего света (или отраженного в отражающей решетке).

307. $\lambda = 0,573 \text{ \AA}$.

308. Если угол падения близок к $\pi/2$, зеркальное отражение наблюдается всегда. При малых углах падения зеркальное отражение может наблюдаться, если шероховатость поверхности $\ll \lambda$.

Решение. Пусть падающие лучи образуют угол ϑ с нормалью к плоскости, изображенной на рис. 117 пунктирной линией. Рассмотрим интерференцию вторичных волн, исходящих от поверхности тела под углом ϑ' к нормали. Разность хода каких-либо двух лучей, идущих в рассматриваемом направлении, определяется выражением

$$\Delta = AD - BC = a(\sin \vartheta' - \sin \vartheta) + h(\cos \vartheta' + \cos \vartheta).$$

Здесь a может принимать какие угодно значения. Поэтому если $\vartheta' \neq \vartheta$, то разность хода Δ может принимать также какие угодно значения, и притом для неправильной поверхности тела эти значения будут встречаться одинаково часто. Это показывает, что правильное отражение, если таковое возможно, может происходить лишь под углом $\vartheta' = \vartheta$. В таком случае

$$\Delta = 2h \cos \vartheta.$$

Отсюда видно, что, каково бы ни было h , можно подобрать достаточно большой угол ϑ , для которого $\Delta \ll \lambda$. При этом условии отражение будет правильное. При нормальном падении $\Delta = 2h$, и правильное отражение возможно лишь при соблюдении условия $h \ll \lambda$.

309. Не могут.

310. $m = nd/b$, где $n = 1, 2, 3, \dots$

311. Исчезнут: 1) спектры порядков 2, 4, 6, ...; 2) спектры порядков 3, 6, 9, ...; 3) спектры порядков 4, 8, 12, ...

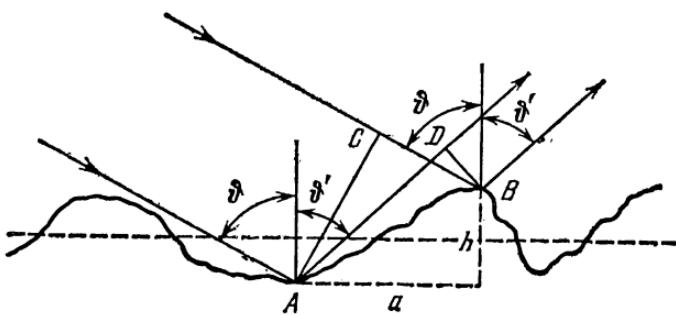


Рис. 117.

312. Максимальный порядок равен наибольшему из целых чисел, не превосходящих d/λ .

313. $\lambda = 6481 \text{ \AA}$.

314. При нормальном падении $\lambda_{\max} = d$. Период решетки должен быть не менее 0,01 см, т. е. решетка должна иметь не более 10 штрихов на 1 мм. При скользящем падении на пропускающую решетку $\lambda_{\max} = 2d$.

315. Углы дифракции не меняются, интенсивности стремятся к нулю.

316. Углы дифракции не меняются, интенсивности стремятся к нулю.

317. $h = \frac{2m-1}{2(n-1)} \lambda$, где $m = 1, 2, 3, \dots$ Интенсивность нулевого главного максимума равна нулю.

318. Главные максимумы системы из двух решеток будут на тех же местах, что и у одной решетки, но интенсивность каждого главного максимума изменится в $4 \cos^2 \left(\frac{\pi a}{\lambda} \cos \vartheta \right)$ раз, где ϑ — угол между нормальнью к решетке и направлением на главный максимум.

320. Если угол между нормалью к ряду вибраторов и направлением на главный лепесток $\vartheta = \Omega t + \delta$, то

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi d}{\lambda} \sin(\Omega t + \delta) + 2\pi m, \text{ где } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

321. Решение. Условие максимума m -го порядка (рис. 118)

$$d(\sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_2) = m\lambda,$$

а максимума $(m+1)$ -го порядка

$$d(\sin \vartheta'_1 - \sin \vartheta'_2) = (m+1)\lambda.$$

При переходе от одного максимума к другому углы ϑ_1 и ϑ_2 получают приращения $\Delta\vartheta_1$ и $\Delta\vartheta_2$, связанные соотношением

$$d(\cos \vartheta_1 \Delta\vartheta_1 - \cos \vartheta_2 \Delta\vartheta_2) = \lambda.$$

Кроме того, $x_1 = h_1 \operatorname{tg} \vartheta_1$, $x_2 = h_2 \operatorname{tg} \vartheta_2$, причем $x_1 + x_2 = a = \text{const}$. Из этого условия получается второе соотношение

$$\frac{h_1}{\cos^2 \vartheta_1} \Delta\vartheta_1 + \frac{h_2}{\cos^2 \vartheta_2} \Delta\vartheta_2 = 0.$$

Из этих двух соотношений находим $\Delta\vartheta_1$ и $\Delta\vartheta_2$, а после этого расстояние между максимумами:

$$\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \frac{h_1}{\cos^2 \vartheta_1} \Delta\vartheta_1 = -\frac{h_2}{\cos^2 \vartheta_2} \Delta\vartheta_2.$$

Вычисления можно упростить, заметив, что углы ϑ_1 и ϑ_2 мало отличаются от угла падения ϑ_0 , соответствующего правильному отражению света от пластиинки.

Заменив эти углы на ϑ_0 , находим

$$\Delta x = \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \frac{\lambda}{d \cos^3 \vartheta_0},$$

При этом $\cos \vartheta_0 \approx h_1/x_1 \approx h_2/x_2$, или $\cos \vartheta_0 = (h_1 + h_2)/(x_1 + x_2) = (h_1 + h_2)/a = 1/10$. Подстановка численных значений дает $\Delta x = 1$ см.

322. Решение. Не теряя общности, при расчетах можно считать решетку бесконечно тонкой. Если ось Z направить перпендикулярно к плоскости решетки в сторону распространения падающей волны, то эта волна представится выражением $E = E_0 e^{i(\omega t - kr)}$. Поле на входе $E_{\text{вх}} = E_0 e^{i\omega t}$. Поле на выходе

$$E_{\text{вых}} = D E_{\text{вх}} = \alpha \left(1 + q \frac{e^{ipx} + e^{-ipx}}{2} \right) E_0 e^{i\omega t}.$$

Это соотношение должно рассматриваться как граничное условие, которому на поверхности решетки должна удовлетворять дифрагиро-

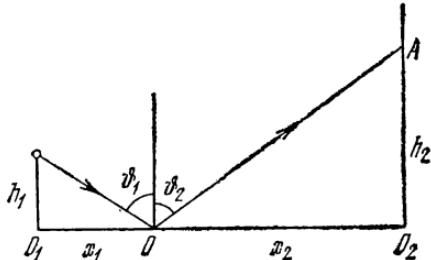


Рис. 118.

ванская волна. В силу этого последнюю надо записать в виде

$$E = \alpha E_0 e^{i(\omega t - kz)} + \beta_1 E_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_z z)} + \beta_2 E_0 e^{i(\omega t + k_x x - k_z z)}.$$

На поверхности решетки ($z=0$) это выражение переходит в предыдущее, если положить $\beta_1 = \beta_2 = \alpha q/2$; $k_x = p$. Если угол дифракции равен ϑ , то $k_x = k \sin \vartheta$, или $k \sin \vartheta = p$. Введя длину волны $\lambda = 2\pi/k$ и период решетки $d = 2\pi/p$, получим $d \sin \vartheta = \lambda$. Таким образом, весь спектр состоит только из главных максимумов нулевого, первого и минус первого порядков. Если $d < \lambda$, то волны первых порядков за решеткой не пропадают, а становятся неоднородными. Они проникают лишь в тонкий слой вблизи решетки и экспоненциально затухают при удалении от нее.

323. 1) 8,1 угл. с/Å; 2) 0,0197 мм/Å; 3) 50,7 Å/мм.

324. Около 0,12 мм.

325. $D = \frac{n}{d \cos \vartheta} = \frac{n}{d \sqrt{1 - (n\lambda/d)^2}} = 0,63 \cdot 10^4$ рад/см = 13 угл. с/Å.

326. 600 штрих/мм.

327. $\Delta\vartheta = \frac{\lambda}{Nd \cos \vartheta}$.

328. $\Delta x = f\lambda/l = 3,3$ мкм.

329. Около 1000.

330. 12 000 и 48 000.

331. Нет.

332. Разрешающая способность не изменится. Дисперсионная область уменьшится вдвое.

333. Максимальный порядок спектра равен целому числу, содержащемуся в d/λ , т. е. $m=3$. В этом порядке

$$\delta\lambda = \lambda/(Nm) = 0,04 \text{ Å}, \quad \Delta x = fm\delta\lambda / \sqrt{d^2 - m^2\lambda^2} = 1 \text{ мм}.$$

334. $x \ll f\lambda/(Nd) = 0,001$ см.

335. $m\lambda = 2h \sqrt{n^2 - \cos^2 \varepsilon}$, где ε — угол между выходящим лучом и поверхностью пластиинки.

336. $D = \frac{(n^2 - 1) - \lambda n dn/d\lambda}{\lambda s}, \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda^2 \sqrt{n^2 - 1}}{2h [(n^2 - 1) - \lambda n dn/d\lambda]}.$

337. $z = L \sqrt{n^2 - 1}/2h = 17$.

338. Минимальный порядок $m_1 = 2h \sqrt{n^2 - 1}/\lambda \approx 47\,200$, максимальный порядок $m_2 = 2hn/\lambda = 62\,400$.

339. $\Delta\lambda = 0,098 \text{ Å}; \quad R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{L}{\lambda} [(n^2 - 1) - \lambda n dn/d\lambda] = 852\,000$.

340. $\Delta\varepsilon = \frac{\lambda \sqrt{n^2 - 1}}{2hs} \approx 5^\circ,4$.

341. Разрешающая способность не изменится, дисперсионная область уменьшится вдвое.

342. Разрешающая способность увеличится в два раза, дисперсионная область не изменится.

343. Пластина с большим показателем преломления имеет большую разрешающую способность, но меньшую дисперсионную область.

$$344. L = \frac{\lambda^2}{(n^2 - 1) \delta \lambda} = 2,5 \text{ см.}$$

345. Будет наблюдаться система пятен, расположенных в узлах прямоугольной сетки.

$$346. 2h \cos \varphi = m\lambda, \quad \Delta\varphi = -\frac{\lambda}{2h \sin \varphi},$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = -\frac{m}{2h \sin \varphi}, \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda^2}{2h \cos \varphi}.$$

$$347. \Delta\lambda = 0,125 \text{ \AA}.$$

$$348. m \approx 36\,300.$$

349. Решение. Пусть R — коэффициент отражения света от каждой посеребренной поверхности пластин интерферометра. (Последние для простоты на рис. 119 изображены математическими плоскостями.) Если I_0 — интенсивность падающего света, то интенсивности прошедших пучков I_1, I_2, I_3, \dots будут

$$I_1 = (1-R)^2 I_0,$$

$$I_2 = R^2 (1-R)^2 I_0,$$

$$I_3 = R^4 (1-R)^2 I_0, \dots,$$

а соответствующие амплитуды

$$A_1 = (1-R) A_0,$$

$$A_2 = R (1-R) A_0,$$

$$A_3 = R^2 (1-R) A_0, \dots,$$

где A_0 — амплитуда падающего света. Каждый пучок запаздывает по фазе относительно предыдущего пучка на $\Delta = 2h \cos \varphi / \lambda$, где h — расстояние между отражающими плоскостями интерферометра, а φ — угол падения. С учетом запаздывания амплитуда результирующего колебания прошедшей волны представится геометрической прогрессией:

$$A = A_0 (1-R) [1 + Re^{-i\Delta} + R^2 e^{-2i\Delta} + \dots] = \frac{A_0 (1-R)}{1 - Re^{-i\Delta}},$$

а интенсивность

$$I = \frac{A_0^2 (1-R)^2}{(1 - Re^{-i\Delta}) (1 - Re^{i\Delta})} = \frac{I_0 (1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 (\Delta/2)}.$$

Когда $\Delta = (2m+1)\pi$, это выражение минимально: $I_{\min} = I_0 \left(\frac{1-R}{1+R}\right)^2$,

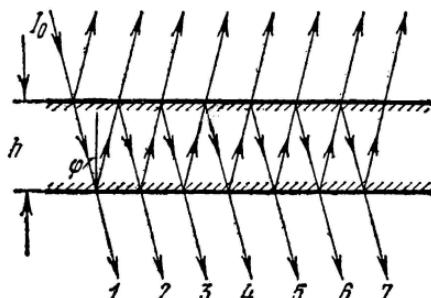


Рис. 119.

или $I_{\min} \approx \frac{I_0}{4}(1-R)^2 \approx 0$, так как отражательная способность R близка к единице. Когда $\Delta = 2m\pi$, величина I достигает максимума: $I_{\max} = I_0$. Когда $(1-R)^2 + 4R \sin^2(\Delta/2) = 2(1-R)^2$, т. е. $4R \sin^2(\Delta/2) = (1-R)^2$, то максимальная интенсивность убывает вдвое. В максимуме $\Delta = 2m\pi$; в точке, где $I = \frac{1}{2}I_{\max}$, $\Delta = 2m\pi + \delta\Delta$, причем $4R^2 \sin^2(\delta\Delta/2)(1-R)^2$. Так как эта величина мала по сравнению с единицей, то синус можно заменить самим углом и таким путем получить $\delta\Delta = (1-R)/\sqrt{R}$.

Пусть для угла падения φ интенсивность линии с длиной волны λ равна половине максимальной. Тогда

$$\frac{2h \cos \varphi}{\lambda} = 2m\pi + \delta\Delta.$$

Для более длинной волны λ' и того же угла падения интенсивность будет также равна половине максимальной при условии

$$\frac{2h \cos \varphi}{\lambda'} = 2m\pi - \delta\Delta.$$

Тогда расстояние между максимумами обеих линий как раз окажется равным полуширине линии, т. е. минимальному расстоянию, разрешаемому интерферометром. В этом случае $\lambda(2m\pi + \delta\Delta) = \lambda'(2m\pi - \delta\Delta)$, откуда

$$\frac{\lambda + \lambda'}{\lambda' - \lambda} = \frac{2m\pi}{\delta\Delta} = \frac{2m\pi}{1-R} \sqrt{R},$$

или ввиду близости линий λ и λ'

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{m\pi}{1-R} \sqrt{R} \approx \frac{m\pi}{1-R} \approx \frac{\pi}{1-R} \frac{2h}{\lambda}.$$

Это выражение можно записать в том же виде, что и для дифракционной решетки, т. е. $\lambda/\delta\lambda = Nm$. Роль эффективного числа штрихов играет величина $N = \pi/(1-R)$. Полученные результаты справедливы и для случая, когда интерферометр работает в отраженном свете.

350. 1) $m = \frac{n-1}{\lambda} b = 10\,000$; 2) $\vartheta = \lambda/a = 51,5''$.

351. Около 1000.

352. Около 1 см.

353. Решение. Пусть $\delta\lambda$ — минимальная разность длин волн двух спектральных линий, разрешаемая призмой при бесконечно узкой коллиматорной щели. Согласно формуле для теоретической разрешающей способности $\lambda/\delta\lambda = a |dn/d\lambda|$, разность показателей преломления для этих спектральных линий равна $\delta n = \lambda/a$. Благодаря различию в показателях преломления первоначально параллельный пучок лучей по выходе из призмы сделается расходящимся. Рассчитаем угловое расхождение вышедшего пучка в предположении,

что на призму падал параллельный пучок. Имеем (рис. 120) $\sin \varphi_1 = n \sin \psi_1$. Отсюда при постоянном φ_1

$$\delta n \cdot \sin \psi_1 + n \cos \psi_1 \cdot \delta \psi_1 = 0.$$

Так как $\psi_1 + \psi_2 = A = \text{const}$, и следовательно, $\delta \psi_1 + \delta \psi_2 = 0$, то

$$\delta n \cdot \sin \psi_1 = n \cos \psi_1 \cdot \delta \psi_2.$$

Далее, из $\sin \varphi_2 = n \sin \psi_2$ находим искомое угловое расхождение вышедшего пучка:

$$\begin{aligned} \delta \varphi_2 &= \frac{\sin \psi_2}{\cos \varphi_2} \delta n + n \frac{\cos \psi_2}{\cos \varphi_2} \delta \psi_2 = \\ &= \left(\frac{\sin \psi_2}{\cos \varphi_2} + \frac{n \cos \psi_2}{\cos \varphi_2} \frac{\sin \psi_1}{n \cos \psi_1} \right) \delta n, \end{aligned}$$

а при установке на угол наименьшего отклонения ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$; $\psi_1 = \psi_2 = \psi$):

$$\delta \varphi_2 = 2 \frac{\sin \psi}{\cos \varphi} \delta n = 2 \frac{\sin \psi}{\cos \varphi} \frac{\lambda}{a}.$$

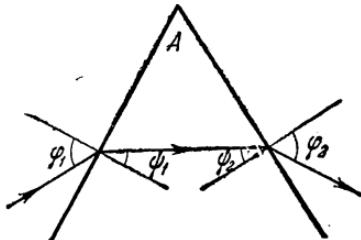


Рис. 120.

Для полного использования теоретической разрешающей способности призмы необходимо, чтобы угловая ширина коллиматорной щели $a = b/f$ была мала по сравнению с $\delta \varphi_2$. Это дает

$$b \ll 2 \frac{\sin \psi}{\cos \varphi} \frac{f\lambda}{a}.$$

Для $A/2 = \psi = 30^\circ$, $n = 1,73$ получаем

$$b \ll \frac{2}{\sqrt{4-n^2}} \frac{f\lambda}{a} = \frac{2f\lambda}{a} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ мм.}$$

$$354. b = \frac{L(n^2 - 1)}{\lambda dn_{np}/d\lambda} = 4,4 \text{ м.}$$

$$355. b = \frac{Nh(n - 1)}{\lambda dn_{np}/d\lambda} = 2,6 \text{ м.}$$

$$356. d = |d\lambda/dn| = 10^{-3} \text{ см.}$$

357. Решение. Из формулы решетки $d(\sin \vartheta - \sin \vartheta_0) = m\lambda$ следует $m\lambda \leq 2d$, откуда умножением на $N = b/d$ получаем $R_{\text{реш}} = 2b/\lambda = 3,3 \cdot 10^5$ и $\frac{R_{\text{реш}}}{R_{np}} = \frac{2/\lambda}{dn/d\lambda} = 33$.

358. Спектр будет пересечен темными линиями, имеющими форму отрезков семейства парабол $y^2 = Cmx$; $m = 0, 1, 2, \dots$, где C — постоянная, зависящая от параметров установки. (Начало координат помещено в центре ньютоновых колец, ось X направлена перпендикулярно, а ось Y — параллельно щели спектрографа.) Все параболы имеют общую вершину $x = 0$, $y = 0$, которой соответствует $\lambda = 0$. Отрезки парабол от вершины до фиолетового конца спектра не

производятся на опыте. Если щель сдвинуть от центра колец на a , то семейство парабол перейдет в $y^2 = Cmx - a^2$, где C — та же постоянная. В этом случае параболы с различными m имеют разные вершины, и могут быть получены те части парабол, на которых находятся вершины. При замене дифракционного спектрографа призматическим темные линии остаются, но их форма перестает быть параболической. (Ср. с задачей 685.)

359. Решение. $l_F \gg h^2/\lambda = 10^6$ см = 10 км. На меньших расстояниях никакой фраунгоферовой картины не возникает. При $l \ll h^2/\lambda$ справедлива геометрическая оптика. За кристаллом получаются пучки дифрагированных лучей, а в местах их пересечения с плоскостью фотопластинки — система пятен. Нефраунгоферовый характер пятен проявляется в том, что в каждом пятне фаза колебаний меняется от точки к точке, тогда как в случае фраунгоферовой картины она практически одинакова в пределах каждого пятна. Однако направления пучков за кристаллом можно определить, проводя от кристалла прямые на (расположенные в бесконечности) фраунгоферовы максимумы. Этим и объясняется, почему при расчете указанных направлений можно пользоваться формулами фраунгоферовой дифракции.

360. Решение. Пусть на решетку падает пучок параллельных лучей с длиной волны λ под углом скольжения α_0 . Направление дифрагированного пучка m -го порядка определяется условием $d(\cos \alpha_0 - \cos \alpha) = m\lambda$. Для такого же пучка с близкой длиной волны λ' : $d(\cos \alpha_0 - \cos \alpha') = m\lambda'$. Отсюда

$$d(\cos \alpha' - \cos \alpha) = m(\lambda - \lambda'), \quad \text{или} \quad d \sin \alpha \cdot \delta\alpha = m\delta\lambda,$$

где введены обозначения: $\delta\alpha = |\alpha' - \alpha|$, $\delta\lambda = |\lambda' - \lambda|$. Для спектрального разрешения необходимо, чтобы оба пучка пространственно разделились. Если l — расстояние до фотопластинки, измеренное вдоль направления дифрагированного луча, то боковое смещение одного пучка относительно другого равно $x = l\delta\alpha$. Условие разрешения состоит в том, чтобы это смещение было не меньше ширины дифрагированного пучка, т. е. $x \geq h$. Ширина h определяется выражением $h = D \sin \alpha$, где D — ширина дифракционной решетки. В результате условие разрешения принимает вид

$$\frac{l m \delta\lambda}{D \sin \alpha} \geq D \sin \alpha.$$

Минимальному разрешаемому расстоянию $\delta\lambda$ соответствует знак равенства. Поэтому для разрешающей способности получаем

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{l m \lambda}{D d \sin^2 \alpha} = N m \frac{l \lambda}{h^2}.$$

Так как $l\lambda/h^2 \ll 1$, то $\lambda/\delta\lambda \ll Nm$, т. е. разрешающая способность

решетки в рентгеновской области спектра меньше, чем в оптической. Для повышения разрешающей способности надо применять узкие пучки, а фотопластинку помещать возможно дальше от решетки.

361. Решение. Пусть O — фокус геометрического схождения лучей (рис. 121); r_0 — ближайшее расстояние от линзы до O . Опишем из O , как из центра, сферическую поверхность S радиуса r_0 . При вычислении светового поля на поверхности S можно ограничиться

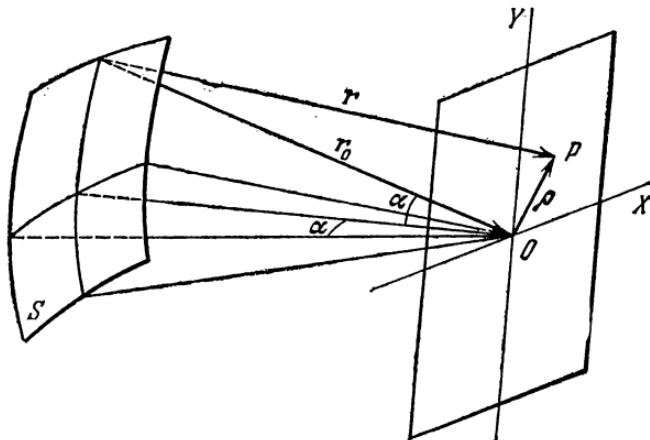


Рис. 121.

приближением геометрической оптики. Тогда световое поле на S в комплексной форме можно записать в виде

$$E_S = \frac{1}{r_0} e^{i(\omega t + kr_0)}.$$

Пусть P — точка наблюдения, dS — элемент поверхности на S , r — расстояние между dS и P . Световое поле в P найдется по принципу Гюйгенса по формуле

$$E_P = \int \frac{dS}{r_0 r} e^{i[\omega t - k(r - r_0)]}, \quad (361.1)$$

где интегрирование производится по той части сферической поверхности S , на которой поле отлично от нуля. Очевидно,

$$r = r_0 + \rho,$$

где r и r_0 — радиусы-векторы, проведенные из dS в точки P и O соответственно, а $\rho = \vec{OP}$. Отсюда

$$r = r_0 \sqrt{1 + \frac{2r_0\rho + \rho^2}{r_0^2}}.$$

Пользуясь формулой бинома Ньютона, находим с точностью до величин, содержащих квадраты ρ :

$$r - r_0 = \frac{r_0 \rho}{r_0} + \frac{\rho^2}{2r_0} - \frac{1}{2} \frac{(r_0 \rho)^2}{r_0^3} = \rho r_1 + \frac{\rho^2}{2r_0} \sin^2(\rho, r_1),$$

а в линейном приближении

$$r - r_0 = \rho r_1,$$

где r_1 — единичный вектор в направлении r_0 , т. е. $r_1 = r_0/r_0$. Ошибка, допустимая при вычислении $r - r_0$, должна быть много меньше длины волны. Поэтому линейным приближением можно пользоваться при условии

$$\rho^2/r_0 \ll \lambda. \quad (361.2)$$

Вычислим световое поле в окрестности O в предположении, что условие (361.2) выполняется. Направление единичного вектора r_1 можно характеризовать углами φ и ψ , которые он образует с плоскостями, проходящими через оптическую ось и параллельными сторонам диафрагмы. Очевидно, $dS = r_0^2 d\varphi d\psi$. Введем в плоскости наблюдения (экрана) прямоугольную систему координат с началом в точке O и с осями, параллельными сторонам квадратной диафрагмы. Координаты точки P обозначим через x и y . Тогда

$$r - r_0 = r_1 \rho = x \sin \varphi + y \sin \psi.$$

Если угол $\alpha = \arctg \frac{D}{2r_0}$, под которым из O видна половина стороны квадратной диафрагмы, мал, то $\sin \varphi$ и $\sin \psi$ можно заменить через φ и ψ . Кроме того, в знаменателе (361.1) r можно приближенно заменить через r_0 . Окончательно

$$E_P = e^{+i\omega t} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-ik(x\varphi + y\psi)} d\varphi d\psi.$$

Если амплитуду в точке O принять равной единице, то амплитуда в точке P :

$$A = \frac{\sin \frac{2\pi x}{\lambda} \alpha \sin \frac{2\pi y}{\lambda} \alpha}{\frac{2\pi x}{\lambda} \alpha \frac{2\pi y}{\lambda} \alpha}, \quad (361.3)$$

а интенсивность

$$I = \left(\frac{\sin \frac{2\pi x}{\lambda} \alpha}{\frac{2\pi x}{\lambda} \alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin \frac{2\pi y}{\lambda} \alpha}{\frac{2\pi y}{\lambda} \alpha} \right)^2. \quad (361.4)$$

Дифракционная картина получается такая же, как при дифракции Фраунгофера от квадратного отверстия. Расстояния между двумя

соседними минимумами, а также от центра центрального максимума до первого минимума равны

$$\Delta x = (1/2)\lambda/\alpha. \quad (361.5)$$

Остается проверить, выполняется ли условие (361.2). Так как заметная интенсивность по формуле (361.3) получается при ρ порядка Δx , то, подставляя в (361.2) $\rho \approx \lambda/\alpha$, придадим (361.2) вид

$$\alpha \gg \sqrt{\lambda/r_0}. \quad (361.6)$$

Последнее условие выполняется во всех оптических приборах с линзами или зеркалами.

Случай круглой диафрагмы существенно не отличается от случая квадратной диафрагмы. Интеграл (361.1) для круглой диафрагмы

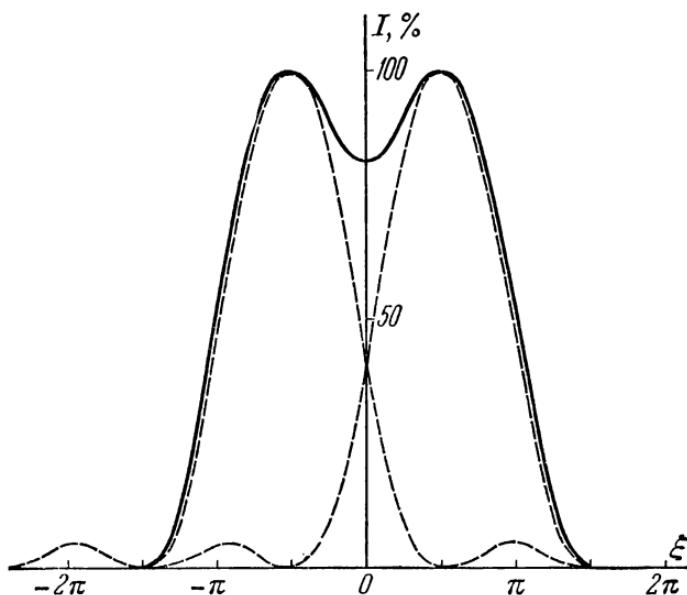


Рис. 122.

в линейном приближении может быть выражен через бесселеву функцию первого порядка. Дифракционная картина в фокальной плоскости имеет вид светлых и темных концентрических кругов со светлым центром. Радиусы темных колец имеют следующие значения:

$$R = 0,61\lambda/\alpha; 1,12\lambda/\alpha; 1,62\lambda/\alpha; \dots, \quad (361.7)$$

где α — угол, под которым виден радиус диафрагмы из точки O .

362. Решение. В случае самосветящихся точек волны, ими излучаемые, некогерентны. На экране складываются интенсивности волн, исходящих из этих точек. Пусть обе точки расположены сим-

метрично относительно главной оптической оси. Рассмотрим распределение интенсивности вдоль оси X (рис. 122). Положение точки наблюдения на этой оси можно характеризовать координатой $\xi = \frac{2\pi x}{\lambda} \alpha$. Минимальное расстояние между центрами дифракционных кружков соответствует по Рэлею разности координат $\Delta\xi = \pi$ (см. решение задачи 361). На рис. 122 пунктирные кривые изображают распределение интенсивностей от каждой из рассматриваемых двух самосветящихся точек, а сплошная кривая дает результирующую интенсивность. Мы видим, что интенсивность в центре картины почти на 20% меньше максимальной интенсивности, равной наибольшей интенсивности от одной светящейся точки. Поэтому при выполнении критерия Рэлея получается раздельное изображение самосветящихся точек.

363. Решение. Если изображаемые точки не самосветящиеся, а освещаются одним и тем же источником света, то волны, исходящие из них, конгруэнтны. Складывать надо не интенсивности, а амплитуды колебаний, учитывая разность фаз между ними. Из решения задачи 361 следует, что в случае изображения одной точки фаза колебаний одна и та же в пределах каждого светлого кольца (в случае квадратной диафрагмы — светлого квадрата) и меняется на 180° при переходе через минимум освещенности в соседнее светлое кольцо.

1) Отверстия освещаются лучами, параллельными главной оптической оси. В этом случае волны исходят из них в одинаковых фазах. Так как до точки O волны проходят одинаковые расстояния, то в точку O они приходят также в одинаковых фазах. Амплитуда результирующего колебания в точке O будет больше в 2 раза, а интенсивность в 4 раза, чем в случае изображения одного из отверстий. Распределение результирующей интенсивности дает кривая рис. 123. Она имеет лишь один максимум, и изображение в глазу будет такое же, как и от одной точки. Поэтому при рассматриваемом способе освещения раздельного изображения освещаемых точек не получится, если расстояние между ними равно минимальному расстоянию, требуемому критерием Рэлея. Чтобы получилось раздельное изображение, надо это расстояние увеличить примерно в 1,4 раза. В соответствии с этим в такое же число раз уменьшается и разрешающая способность по сравнению со случаем самосветящихся объектов.

2) Отверстия освещаются параллельными лучами, наклоненными под углом ϑ к главной оптической оси. В этом случае волны из отверстий выходят не с одинаковыми фазами, а с разностью фаз $\delta = 2\pi d \sin \vartheta / \lambda$, где d — расстояние между центрами отверстий. С такой же разностью фаз они придут и в O . Если $d \sin \vartheta = \lambda/4$, то $\delta = \pi/2$, интенсивность в O будет в два раза больше соответствующей интен-

сивности при наличии одного из отверстий. Разрешающая способность при таком освещении будет такая же, как и в случае самосветящегося объекта. Если $d \sin \vartheta = \lambda/2$, то $\delta = \pi$. Тогда волны приходят в O в противоположных фазах и интенсивность там будет равна нулю. Разделение изображений будет выражено весьма резко. При таком освещении расстояние между отверстиями может быть

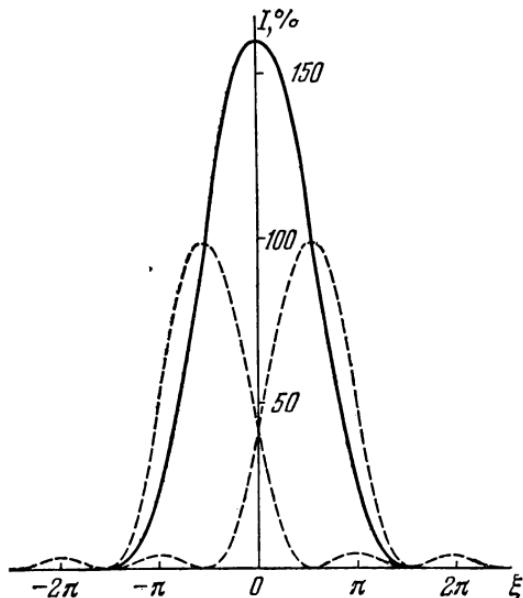


Рис. 123.

меньше предела Рэлея, и все же будут получаться раздельные изображения их.

3) Отверстия освещаются лучами всевозможных направлений. В этом случае получается практически такая же разрешающая способность, как и для самосветящихся объектов.

364. 1) 34"; 2) 0,042 мм.

365. Решение. Пусть рассматриваемый объект виден невооруженным глазом под углом $\alpha = 1,22\lambda/D$, где D — диаметр объектива, т. е. под минимальным углом, который способен разрешить объектив. В трубу тот же объект будет виден под углом $\beta = N\alpha$. Угол β должен быть не меньше угла $\gamma = 1,22\lambda/d$, который способен разрешить глаз (d — диаметр зрачка глаза). Из условия $\beta \geq \gamma$ получаем

$$N \geq D/d.$$

Увеличение $N_{\text{норм}} = D/d$ называется нормальным. При меньших увеличениях используется только часть объектива, и разрешающая

способность системы трубы — глаз понижается. Увеличения, большие нормального, не целесообразны, так как при этом разрешающая способность системы не увеличивается, а яркость изображения уменьшается (см. задачу 188).

366. 1) Разрешаемое угловое расстояние зрительной трубы $\vartheta = 1,22\lambda/D$, где D — диаметр объектива. При визуальных наблюдениях можно принять $\lambda = 5500 \text{ \AA}$; тогда $\vartheta = 2,76''$. 2) При увеличении $N \geq D/d = 10$.

367. $\delta\vartheta = 1,22\lambda/D = 0,023''$.

368. Угловые размеры почти всех звезд много меньше разрешаемых угловых расстояний даже самых больших телескопов. При таких условиях величина изображения звезды на сетчатке глаза определяется исключительно дифракционными эффектами в оптической системе (телескоп + глаз) и не зависит от увеличения. Но яркость этого изображения пропорциональна световому потоку, поступающему в оптическую систему. Этот световой поток при пользовании телескопом во столько раз больше светового потока, проходящего через зрачок невооруженного глаза, во сколько раз площадь отверстия объектива больше площади зрачка глаза (если увеличение телескопа нормальное). Поэтому в телескоп можно видеть более слабые звезды, чем невооруженным глазом. При нормальном увеличении диаметр выходного зрачка равен диаметру зрачка глаза. Применение больших увеличений при рассматривании звезд бесполезно. При меньших увеличениях не весь свет, поступивший в телескоп, проходит через зрачок глаза.

369. См. ответ предыдущей задачи.

370. В $\sqrt{\alpha\beta} = 10$ раз.

371. В $\sqrt{\alpha\beta} = 10$ раз.

372. $l_2 = l_1 D_2 / D_1 = 5 \cdot 10^4 \text{ км.}$

373. Не может. Диаметр зрачка глаза орла не превышает нескольких миллиметров. Если предположить, что он равен даже 10 мм, то минимальный угол, под которым орел может видеть раздельно две точки предмета, окажется примерно в 3 раза больше угловых размеров мышонка.

374. На Луне около 40 м, на Солнце около 20 км.

375. Около 28 км. Рассмотренная задача до сравнительно недавнего времени представляла интерес в связи с гипотезой о каналах на Марсе и их искусственном сооружении. Фотографирование поверхности Марса с помощью ракет и исследование его посредством управляемых аппаратов, спускаемых на поверхность Марса, не подтвердило эту гипотезу.

376. Решение. При малых углах дифракции искомое расстояние x найдется из требования, чтобы разность хода $r_2 - r_1$

крайних интерферирующих лучей (рис. 124) была равна длине волны λ . Применяя теорему Пифагора и извлекая квадратные корни с помощью формулы бинома Ньютона, для этой разности нетрудно получить

$$r_2 - r_1 = \frac{xD}{b} - \frac{xD}{2b^3} \left(x^2 + \frac{D^2}{4} \right) + \dots$$

Ограничаваясь первым членом, найдем

$$x = b\lambda/D. \quad (376.1)$$

Ошибка при вычислении $r_2 - r_1$ должна быть мала по сравнению с λ .

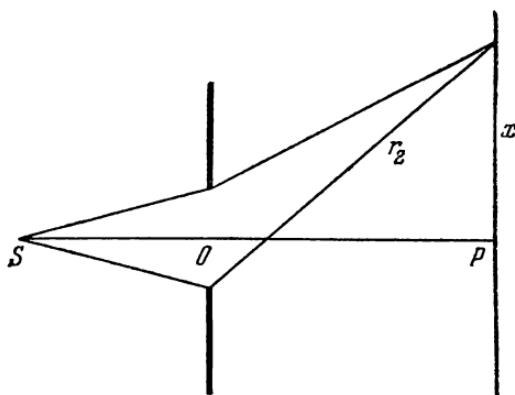


Рис. 124.

Отсюда получаем условие применимости предыдущей формулы

$$\frac{1}{2b^2} \left(\frac{b^2\lambda^2}{D^2} + \frac{D^2}{4} \right) \ll 1. \quad (376.2)$$

377. Если пользоваться для радиуса первого темного дифракционного кольца формулой (376.1), то получится

$$D^2 = \frac{2ab\lambda}{a+b}, \quad (377.1)$$

т. е. площадь отверстия должна равняться половине площади центральной френелевой зоны, построенной для точек S и P (рис. 124). Условие (376.2) сводится к

$$\frac{D^2}{4b^2} \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2} \right) \ll 1$$

и всегда хорошо выполняется во всякой камере с малым отверстием.

При более точном решении надо пользоваться для радиуса x первого темного кольца формулой $x = 1,22b\lambda/D$, что дает

$$D^2 = \frac{2,44ab\lambda}{a+b}. \quad (377.2)$$

Рэлей, более подробно исследовавший этот вопрос теоретически и экспериментально, нашел для наивыгоднейшего диаметра отверстия

$$D = 1,8 \sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}}, \quad (377.3)$$

что практически совпадает с (377.1) или (377.2).

378. $D = \sqrt{2,44L\lambda} \approx 0,35$ мм.

379. $L \approx D^2/(2,44\lambda) \approx 1000$ км; $S \approx (2,44\lambda/D)^2 \approx 1,5 \cdot 10^{-12}$.

380. Разрешающая способность увеличится приблизительно в два раза.

381. $N \geq D/d$, где D — диаметр объектива, а d — зрачка глаза.

382. $L < Dl/(1,22\lambda) = 3,7$ м. Легко видеть, что то же условие соблюдается и при применении так называемого объективного отсчета на шкале, т. е. при проектировании светового зайчика, отраженного от зеркальца гальванометра на шкалу.

383. $r \approx \frac{Dd}{2} \sqrt{\frac{P}{hc\lambda n}} \approx 0,1$ светового года.

384. $l \leq \frac{D}{2} \sqrt{\frac{Pd^2}{2P_{\text{пор}}\lambda^2}} \approx 250$ км.

385. $\vartheta = (m + 1/2)\lambda/D$, где m — целое число.

386. $x = f\vartheta = (m + 1/2)f\lambda/D$, где m — целое число.

387. $\vartheta = 2(m + 1/2)\lambda/D$, где m — целое число.

388. Решение. Для одного пучка света (зеркало M_1 или M_2 закрыто) в фокальной плоскости будет наблюдаться система дифракционных колец, появляющихся в результате дифракции на круглой диафрагме зеркала. Диаметры колец определяются размером диафрагмы. Для двух пучков света (зеркала M_1 и M_2 открыты) одновременно будут наблюдаться две системы колец, которые, вообще говоря, не совпадают друг с другом. Но путем поворота зеркал M_2 и M_4 можно вторую систему колец совместить с первой. Тогда они будут интерферировать друг с другом и кольца будут пересечены темными и светлыми полосами, перпендикулярными к линии M_1M_2 .

389. Решение. По принципу Гюйгенса действительные источники света можно заменить виртуальными источниками, распределенными в плоскостях диафрагм, стоящих перед зеркалами M_1 и M_2 . Ради простоты (это не является ограничением) будем считать диафрагмы настолько малыми, что их можно принять за точки. Тогда задача сводится к нахождению интерференционной картины от двух точечных источников S_1 и S_2 (рис. 125), когерентных между собой.

Световые пучки от этих источников, прежде чем они достигнут объектива L , претерпевают отражения от зеркал M_1, M_2, M_3, M_4 . Можно в рассуждениях исключить из рассмотрения эти отражения, если заменить источники S_1 и S_2 воображаемыми источниками S_1'' и S_2'' , которые являются их изображениями в плоских зеркалах. При такой замене фазы S_1 и S_1'' будут одинаковы, равно как и фазы S_2 и S_2'' .

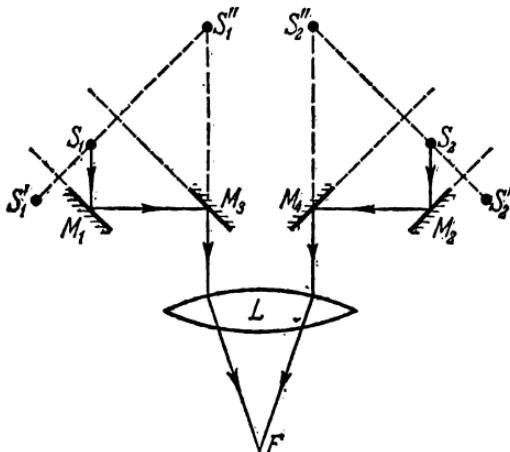


Рис. 125.

и S_2'' . Тем самым задача свелась к задаче 385. При сближении зеркал M_3 и M_4 уменьшается расстояние между S_1'' и S_2'' , что ведет к увеличению ширины интерференционных полос.

Допустим, что одна из звезд посылает свет перпендикулярно к прямой S_1S_2 . Тогда фазы источников S_1 и S_2 (а следовательно, S_1'' и S_2'') будут одинаковы: Для того чтобы вторая звезда дала систему полос, смещенную относительно первой на половину ширины полосы, необходимо, чтобы фазы вторичных источников S_1 и S_2 , возбуждаемых второй звездой, отличались на π . Это дает

$$D \sin \vartheta \approx D\vartheta = 1/2\lambda,$$

где ϑ — угловое расстояние между звездами, а D — расстояние между центрами зеркал M_1 и M_2 . Таким образом,

$$\vartheta = (1/2\lambda)/D.$$

Если обе звезды одинаковы, то при выполнении этого условия полосы интерференции исчезают. Вообще, интерференционные полосы будут исчезать, если

$$\vartheta = (m + 1/2) \lambda/D.$$

Если одиночную звезду заменить квадратом постоянной поверхности яркости, то этот квадрат можно разбить на линейные источники, параллельные одной из сторон квадрата, а именно той, которая перпендикулярна к S_1S_2 . Если угловые размеры сторон квадрата равны

$$\Theta = \lambda/D,$$

то каждый линейный источник одной половины квадрата уничтожит интерференционные полосы, даваемые соответственным источником второй половины квадрата. Вообще, полосы интерференции пропадают при выполнении условия

$$\Theta = 2(m + \frac{1}{2})\lambda/D.$$

Расчет для звезд с круглым диском постоянной поверхности яркости несколько сложнее. Он показывает, что первое исчезновение интерференционных полос наступает тогда, когда

$$\Theta = 1,22\lambda/D,$$

где Θ — угловой диаметр звезды.

390. $0,047''$.

391. $\delta\varphi \approx \lambda/D$.

392. 1) $\delta\varphi \approx \lambda/d$. При $\lambda = 1$ м $\delta\varphi \approx 1''$; при $\lambda = 10$ см $\delta\varphi \approx 7''$.

2) $\delta\varphi \approx \sqrt{\lambda/b}$. При $\lambda = 1$ м $\delta\varphi \approx 2'$; при $\lambda = 10$ см $\delta\varphi \approx 40''$.

3) $h \ll \sqrt{b\lambda}$. При $\lambda = 1$ м $\sqrt{b\lambda} = 19,5$ км; при $\lambda = 10$ см $\sqrt{b\lambda} = 6,2$ км.

393. $\delta\varphi \approx \lambda/D$. При $\lambda = 1$ м $\delta\varphi \approx 0,06''$. При $\lambda = 10$ см $\delta\varphi \approx 0,006''$.

Метод требует, чтобы источник радиоизлучения находился на прямой, соединяющей точку наблюдения с центром Луны. Кроме того, он предъявляет весьма жесткие требования к гладкости лунной поверхности и к отступлениям формы Луны от сферической. Высота неровностей поверхности по всей границе лунного диска должна быть мала по сравнению с $h = b\lambda/D$. Разность наибольшего и наименьшего диаметров лунного диска также не должна превышать этой величины. При $\lambda = 1$ м $h \approx 100$ м; при $\lambda = 10$ см $h \approx 10$ м. Эти жесткие требования исключают возможность использования рассматриваемого метода, по крайней мере, для радиоволн с длиной волны $\lambda < 100$ м.

394. $\Theta \approx \lambda/(2h) \approx 3''$.

395. $\Theta \approx \lambda/(2R) \sim 0,2''$, где R — радиус Земли.

396. $\Theta \approx \lambda/(2h) \sim 20''$. Высота спутника над поверхностью Луны $h \approx 500$ км. Спутник Земли при работе на волне с длиной 100 м использовать трудно, а обычно даже невозможно из-за влияния земной ионосфера.

397. Диаграмма имеет «ножевую» форму с угловыми размерами λ/D в одном направлении и λ/d — в другом.

398. 1) Около 0,3 мкм; 2) около 0,19 мкм.

399. 1) В 2 раза; 2) 0,095 мкм; 3) около 5300.

400. Решение. Пусть в микроскоп рассматривается объект, величина которого l равна наименьшему разрешаемому расстоянию его объектива. Для самосветящихся объектов или объектов, освещаемых диффузно, $l = 0,61\lambda/(n \sin u)$, где $n \sin u$ — числовая апертура объектива. Невооруженным глазом с расстояния ясного зрения L этот объект виден под углом $\alpha = l/L$. В микроскоп он виден под углом $\beta = N\alpha$, где N — увеличение микроскопа. Угол β должен быть не меньше минимального углового расстояния $\gamma = 1,22\lambda/d$, разрешаемого глазом (d — диаметр зрачка глаза). Условие $\beta \geq \gamma$ дает $N \geq \geq 2L n \sin u/d$. Увеличение $N_{\text{норм}} = 2L n \sin u/d$ называется нормальным. Применять увеличения больше нормального не целесообразно, так как при этом разрешающая способность микроскопа не повышается, а яркость изображения уменьшается. (См. задачу 192.)

401. Когда узкая щель вертикальна, на экране получается система горизонтальных полос. При горизонтальной щели полосы становятся вертикальными. Когда щель наклонена под углом 45° к горизонту полосы также наклонены под тем же углом, но перпендикулярны к направлению щели. При широкой щели, независимо от ее направления, на экране получается подобное изображение проволочной сетки.

402. $N \geq D/d$.

403. $f_2 \leq \frac{ld}{2f_1 n \sin \alpha}$, где d — диаметр зрачка глаза.

404. $n \sin \alpha \geq D/(2f)$, $N \geq DL/(fd)$, где L — расстояние ясного зрения, d — диаметр зрачка глаза.

405. $D^2/f^2 \geq z^2\lambda^2 \approx 0,25$.

406. Период изменения показателя преломления жидкости равен длине ультразвуковой волны Λ .

Решение. Показатель преломления жидкости зависит только от ее плотности. Поэтому задача сводится к определению пространственного периода изменения плотности жидкости. На рис. 126 черными



Рис. 126.

кружками изображены узлы скоростей в стоячей звуковой волне, а стрелками показаны направления движения частиц жидкости в некоторый момент времени. В стоячей волне все частицы жидкости между двумя соседними узлами скорости движутся в одном направлении. При переходе через узел скорости направление движения

частиц меняется на противоположное. Пусть смещения частиц жидкости в некоторый момент времени достигли своих максимальных значений. Тогда при направлениях скоростей, указанных на рис. 126, в узлах A , B , ... будут сгущения, а в узлах C , D , ... — разрежения. Через половину периода в узлах A , B , ... будут разрежения, а в узлах C , D , ... — сгущения. Расстояние между двумя соседними сгущениями или разрежениями равно пространственному периоду изменения плотности, а следовательно, и показателя преломления жидкости. Оно, как видно из рис. 126, равно длине ультразвуковой волны Λ .

407. Решение. Так как частота звуковых колебаний очень мала по сравнению с частотой световых колебаний, то можно считать, что жидкость, в которой распространяется свет, неподвижна. Такая жидкость представляет собой неоднородную среду, показатель преломления которой меняется периодически в направлении, параллельном AB . Расчет светового поля в такой неоднородной среде представляет очень трудную задачу. Однако, как бы ни распространялся свет внутри жидкости, можно утверждать, что световое поле в плоскости CD при выходе из кюветы будет периодически меняться в направлении CD с периодом Λ . Для определения светового поля за кюветой можно, по принципу Гюйгенса, заменить реальные источники света виртуальными, распределенными по поверхности CD . При этом расстояние между двумя соседними одинаковыми виртуальными источниками будет равно длине ультразвуковой волны Λ (см. решение задачи 406). Этим задача сведена к дифракции света на двумерной плоской решетке.

$$408. v = f\lambda\nu/\Delta x = 1200 \text{ м/с.}$$

409. Нельзя.

Решение. Пространственный период изменения показателя преломления жидкости в обоих случаях равен длине ультразвуковой волны Λ . Поэтому в обоих случаях будут одинаковы углы дифракции. Более того, будет одно и то же распределение интенсивности света в дифракционных спектрах, ибо в обоих случаях показатель преломления как функция координат (при фиксированном времени) меняется по одному и тому же закону синуса. При заметном затухании ультразвука характер изменения показателя преломления в пространстве в стоячей и бегущей волнах уже не будет одинаковым. В этом случае по характеру дифракционной картины бегущую волну в принципе можно отличить от стоячей.

410. Решение. Если бы глаз мгновенно реагировал на световое раздражение и не обладал способностью сохранять зрительные впечатления, то, взглянув на жидкость, мы увидели бы светлые и темные полосы, расстояние между которыми равнялось бы расстоянию между двумя соседними сгущениями, т. е. Λ . Через половину

периода звуковых колебаний на месте каждой светлой полосы образовалась бы темная, и наоборот. В действительности глаз сохраняет зрительные впечатления в течение примерно 0,1 с, т. е. в течение времени, которое чрезвычайно велико по сравнению с периодом ультразвуковых колебаний. Поэтому глаз не в состоянии видеть смену полос. Он фиксирует некоторую среднюю освещенность сетчатки, получающуюся путем усреднения мгновенной освещенности по времени, которое очень велико по сравнению с периодом ультразвуковых колебаний. При таком усреднении интенсивность света во всех узлах скоростей сделается одинаковой. Во всех пучностях скоростей интенсивность будет также одинаковой, но отличающейся от интенсивности в узлах. Поэтому период видимой картины должен равняться расстоянию между соседними узлами, т. е. $\Lambda/2$.

П р и м е ч а н и е. Для полного исследования вопроса необходимо было бы показать, почему при усреднении получается система полос, а не равномерное освещение жидкости. Такое исследование требует подробного рассмотрения сложного вопроса о распространении световой волны в сильно неоднородной среде, какой является жидкость при наличии в ней ультразвукового поля. Это исследование, в согласии с опытом, показывает, что полосы должны наблюдаться. Цель рассмотренной нами задачи состояла в том, чтобы, принимая наличие полос как опытный факт, определить расстояние между ними.

411. В дифракционных спектрах, наряду с основной частотой ω , появятся частоты $\omega \pm m\Omega$, где Ω — частота ультразвуковых колебаний, m — целое число.

Р е ш е н и е. Стенку кюветы, на которую падает световая волна, примем за координатную плоскость XY , за направление оси Z берем направление распространения света, а ось X направим перпендикулярно к волновым фронтам ультразвуковой волны. Поле падающей волны имеет вид $E = E_0 \cos(\omega t - kz)$. На передней стенке кюветы, где $z = 0$, оно равно $E_1 = E_0 \cos \omega t$. Поле E_2 на задней стенке кюветы можно представить в виде $E_2 = AE_1$, где A — пропускаемость кюветы, которая, очевидно, является периодической функцией координаты x и времени t . Разложив ее в ряд Фурье и отбросив высшие гармоники, можно написать:

$$A = a + b_1 \cos \Omega t + b_2 \sin \Omega t,$$

где a , b_1 , b_2 не зависят от времени. В результате амплитуда поля E_2 оказывается модулированной с частотой модуляции Ω . Такое поле эквивалентно трем гармоническим полям с частотами ω , $\omega - \Omega$, $\omega + \Omega$. Действительно,

$$\begin{aligned} E_2 = AE_1 &= (a + b_1 \cos \Omega t + b_2 \sin \Omega t) \cos \omega t = \\ &= a \cos \omega t + \frac{1}{2} \{b_1 \cos (\omega - \Omega) t - b_2 \sin (\omega - \Omega) t\} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \{b_1 \cos (\omega + \Omega) t + b_2 \sin (\omega + \Omega) t\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что и вторичные волны Гюйгенса, распространяющиеся от задней стенки кюветы, будут иметь частоты ω , $\omega - \Omega$, $\omega + \Omega$. Такие же частоты появятся и в дифракционных спектрах. Если в разложении A учесть высшие гармоники, то в дифракционном спектре добавятся частоты $\omega \pm 2\Omega$, $\omega \pm 3\Omega$ и т. д.

§ 5. Элементы голограммии

412. $\Phi(x) = \alpha x$, $E_P = E_0 \exp[i\alpha x]$, где $\alpha = k \sin \vartheta$. При изменении знака проекции k_x знак перед произведением αx изменится на обратный.

$$413. \Phi = -\frac{\pi}{\lambda r_0} (x^2 + y^2), \quad E_P = E_0 \exp \left\{ -\frac{i\pi}{\lambda r_0} (x^2 + y^2) \right\}.$$

Решение. Поле волны, распространяющейся из источника S , в точке P можно записать в виде

$$E_P = \frac{A}{r} \exp \{i(\omega t - kr)\},$$

где $r \approx r_0 + \frac{x^2}{2r_0} + \frac{y^2}{2r_0}$, A — постоянная. Учитывая это, получаем результат, приведенный в ответе.

$$414. \Phi = \frac{\pi}{\lambda r_0} (x^2 + y^2), \quad E_P = E_0 \exp \left\{ \frac{i\pi}{\lambda r_0} (x^2 + y^2) \right\}.$$

415. $D(x) = 2E_0^2 - \gamma E_1^2 - 2E_0 E_1 \gamma \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \vartheta \right)$, где γ — постоянная, зависящая от условий экспонирования и проявления, называемая коэффициентом контрастности фотопластиинки. Пространственный период расположения полос почернения $d = \lambda / \sin \vartheta$.

416. $D(x) = 2E_0^2 - \gamma E_1^2 - \gamma E_0 E_1 \exp \left\{ i\alpha x + \frac{i\pi}{\lambda a} (x^2 + y^2) \right\} - \gamma E_0 E_1 \exp \left\{ -i\alpha x - \frac{i\pi (x^2 + y^2)}{\lambda a} \right\}$, где $\alpha = k \sin \theta$, а для опорной волны была принята следующая запись:

$$E = E_0 \exp \{i(\omega t + kx \sin \theta - kz \cos \theta)\}.$$

417. За голограммой будут распространяться четыре волны, показанные на рис. 127. Точки S' и S'' находятся соответственно перед голограммой и за ней на том же расстоянии от нее, на котором находилась точка S от фотопластиинки при получении голограммы.

Решение. Распределение фаз и амплитуд в плоскости голограммы в падающей волне дается соотношениями

$$\Phi = -\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \vartheta, \quad E_P = E_{01} \exp(-i\alpha x),$$

где E_{01} — напряженность поля волны в точке 0, ось X направлена вверх (см. решение задачи 412). Волновое поле за голограммой будет

$$D_{np} = D(x) E_p = E_{01} \left\{ 2E_0^2 \exp(iax) - \gamma E_1^2 \exp(iax) - \gamma E_1 E_0 \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda a}(x^2 + y^2)\right] - \gamma E_0 E_1 \exp(2iax) \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda a}(x^2 + y^2)\right] \right\}.$$

Первый член (см. рис. 127) соответствует волне, идущей под тем же углом ϑ к оси, как и падающая волна, второй — волне, идущей

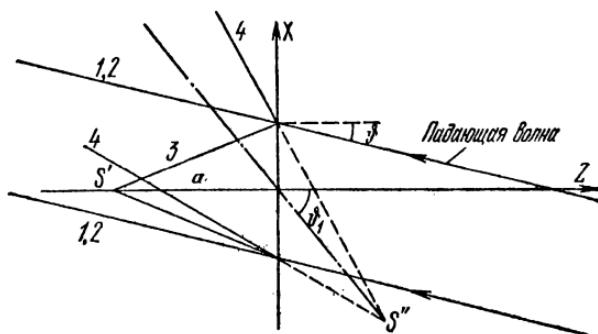


Рис. 127.

почти под тем же углом ϑ . Третий член соответствует волне, сходящейся на оси системы в точке S' , удаленной на расстояние a от голограммы. Четвертый член соответствует расходящейся волне, ось которой повернута на угол ϑ_1 от оси системы, где $\sin \vartheta_1 = 2 \sin \vartheta$.

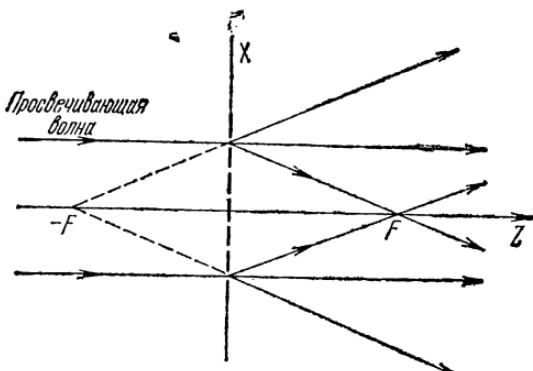


Рис. 128.

418. Ход световых пучков при просвечивании зонной пластинки представлен на рис. 128. Фокусные расстояния зонной пластинки равны $f = \pm a$. При изменении длины волны фокусные расстояния

связаны соотношением $\lambda f = \lambda' f'$. Приведенные результаты вытекают непосредственно из анализа физического смысла членов выражения $D(x)$, данного в условиях задачи.

$$419. z = a + \frac{x^2 + y^2}{4a} - \frac{m\lambda}{2}, \quad \Delta z = \frac{\lambda}{2}.$$

Решение. Не учитывая сдвиг фазы волны при отражении ее от зеркала (что несущественно для ответа на поставленный в задаче вопрос), разность хода Δ опорной и предметной волн, приходящих в точку $A(x, y, z)$ (рис. 49), равна

$$\Delta = a + \sqrt{(a-z)^2 + x^2 + y^2} - z.$$

При $z \ll a$, $x \ll a$, $y \ll a$ получаем

$$\Delta = 2(a-z) + \frac{x^2 + y^2}{2a}.$$

Максимальное пограничение будет в точках, где $\Delta = m\lambda$, т. е.

$$z = a + \frac{x^2 + y^2}{4a} - \frac{m\lambda}{2}.$$

Это — уравнение семейства параболоидов вращения.

Возможно и другое решение. Уравнения опорной и предметной волн соответственно:

$$E_1 = E_{10} \exp \{i(\omega t - kz)\},$$

$$E_2 = E_{20} \exp \{i(\omega t - ka - k \sqrt{(a-z)^2 + x^2 + y^2})\}.$$

Интенсивность светового поля:

$$I \sim (E_1 + E_2)(E_1^* + E_2^*) = \\ = E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20} \cos \{kz - ka - k \sqrt{(a-z)^2 + x^2 + y^2}\}.$$

Условие максимального пограничения фотопластинки:

$$kz - ka - k \sqrt{(a-z)^2 + x^2 + y^2} = 2m\pi,$$

откуда

$$z = a + \frac{x^2 + y^2}{4a} - \frac{m\lambda}{2} \quad \text{и} \quad \Delta z = \frac{\lambda}{2}.$$

420. $x = z \operatorname{ctg} \alpha - \frac{m\lambda}{\sin 2\alpha} - \frac{\varphi}{k \sin 2\alpha}$; это будет семейство плоскостей, параллельных зеркалу З.

$\Delta h = \frac{\lambda}{2 \cos \alpha} = \frac{\lambda}{2 \sin (\theta/2)}$, где θ — угол между волновыми векторами опорной и предметной волн.

Решение. Уравнение опорной и предметной волн

$$E_1 = E_{10} \exp [i(\omega t - kz)],$$

$$E_2 = E_{20} \exp [i(\omega t - kx \sin \beta + kz \cos \beta - \varphi)],$$

где $\beta = 2\alpha$, φ — запаздывание фазы отраженной волны, зависящее от расстояния между зеркалом и фотопластинкой и условия отражения

ее от зеркала. Интенсивность света:

$$I \sim (E_1 + E_2)(E_1^* + E_2^*) = \\ = E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20} \cos(kz + kz \cos \beta - kx \sin \beta - \varphi).$$

Максимумы почернения соответствуют условию

$$kz + kz \cos \beta - kx \sin \beta - \varphi = 2m\pi \quad (m \text{ — целые числа}),$$

откуда

$$x = \frac{z(1 + \cos \beta)}{\sin \beta} - \frac{2m\pi}{k \sin \beta} - \frac{\varphi}{k \sin \beta} = \\ = z \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} - \frac{2m\pi}{k \sin \beta} - \frac{\varphi}{k \sin \beta} = z \operatorname{ctg} \alpha - \frac{m\lambda}{\sin 2\alpha} - \frac{\varphi}{k \sin \beta}.$$

Таким образом, линии равного почернения (пересечения плоскостей

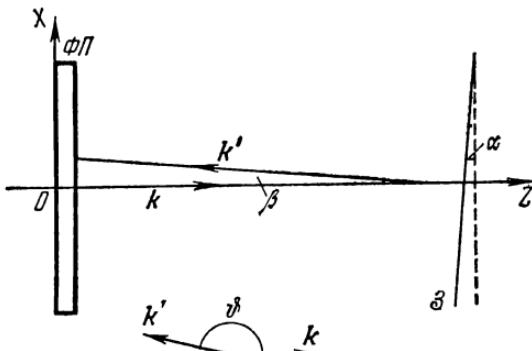


Рис. 129.

равного почернения плоскостью чертежа) располагаются параллельно биссектрисе угла между векторами \mathbf{k} и \mathbf{k}' , т. е. параллельно зеркалу Z (рис. 129).

Расстояние между плоскостями

$$\Delta h = \Delta z \cos \alpha = \frac{\lambda}{2 \cos \alpha} = \frac{\lambda}{2 \sin(\theta/2)}.$$

421. На экране получится изображение металлической пластинки, пересеченное горизонтально расположенными интерференционными полосами. Положение темных полос определяется из условия $2\delta = (2k+1)\lambda/2$, где δ — стрела прогиба металлической пластинки в данном месте. Модуль Юнга

$$E = \frac{24Flx^2}{ab^3(2k+1)\lambda},$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$

§ 6. Поляризация света. Формулы Френеля

422. Если N — полное число зон Френеля, то интенсивность света в фокусе пластиинки будет приблизительно в N^2 раз больше, чем при свободном распространении света.

424. Уменьшится вдвое независимо от поляризации падающего света.

425. Разрешающая способность не изменится.

426. $\rho = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2$. Для воды $\rho = 2\%$, для стекла $\rho = 4\%$.

427. $\sigma = 4n/(n+1)^2 = 96\%$.

428. $100(1 - 0,96^8) = 28\%$.

430. Решение. Если отражение не является полным, то, как следует из закона преломления света, каждому углу падения соответствует вещественный угол преломления ψ . Поэтому оба отношения¹⁾

$$\frac{R_s}{\mathcal{E}_s} = -\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}, \quad \frac{R_p}{\mathcal{E}_p} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)}$$

вещественны. Физически это означает, что при отражении либо совсем нет изменения фазы, либо это изменение составляет 180° . Если падающая волна линейно-поляризована, то разность фаз между ее компонентой с электрическим вектором, перпендикулярным к плоскости падения, и компонентой с электрическим вектором, лежащим в этой плоскости, равна либо 0° , либо 180° . На основании изложенного такая же разность фаз будет и у компонент отраженной волны. При сложении такие компоненты дают линейно-поляризованную волну.

431. $\operatorname{tg} \delta = \cos(\varphi - \psi) \operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{tg} \rho = -\frac{\cos(\varphi - \psi)}{\cos(\varphi + \psi)} \operatorname{tg} \alpha.$

432. 1) $56^\circ 19'$; 2) $\Delta = \frac{4n^2 - (1+n^2)^2}{4n^2 + (1+n^2)^2} = -0,08$.

433. $57^\circ 05'$.

434. $\frac{I_r}{I_e} = \frac{1}{2} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^2 = 0,74$.

435. $D_p = \mathcal{E}_p/n$.

436. $A = \pi - 2\varphi_B = 68^\circ$.

437. Электрический вектор должен лежать в плоскости падения. Показатель преломления призмы должен быть равен $n = 1/\operatorname{tg}(A/2) = \sqrt{3} = 1,73$.

438. 1) Будут; 2) не будут.

¹⁾ \mathcal{E}_s и \mathcal{E}_p — комплексные амплитуды главных компонент падающей волны, электрические векторы которых соответственно перпендикулярны и параллельны плоскости падения. R_s и R_p имеют такой же смысл для отраженной, а D_s и D_p — преломленной волн.

439. Если свет поляризован перпендикулярно к плоскости падения, то интерференционные полосы исчезнут при углах падения $\varphi_1 = \arctg n_1$ и $\varphi_2 = \arctg n_2$. Если свет поляризован в плоскости падения, то исчезновения интерференционных полос не будет.

440. Результат непосредственно получается из формул Френеля.

442. Свет внутри слоя диэлектрика испытывает многократные отражения на его границах (рис. 130). Если $\delta = 2\pi nl/\lambda$ — разность фаз, соответствующая двукратному прохождению света через слой

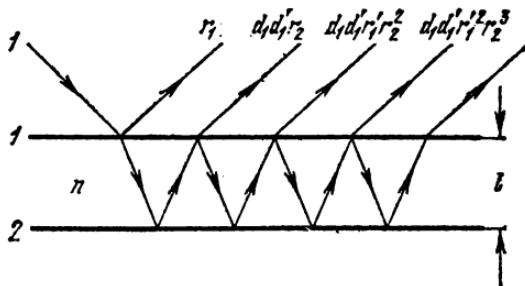


Рис. 130.

(т. е. от одной его границы до другой и обратно), то с учетом многократных отражений для комплексной амплитуды отраженной волны можно написать

$$\frac{R}{\mathcal{E}} = r_1 + d_1 d_1' r_2 e^{-i\delta} + d_1 d_1' r_1' r_2^2 e^{-2i\delta} + d_1 d_1' r_1'^2 r_2^3 e^{-3i\delta} + \dots,$$

откуда

$$\frac{R}{\mathcal{E}} = r_1 + \frac{d_1 d_1' r_2 e^{-i\delta}}{1 - r_1' r_2 e^{-i\delta}},$$

или с учетом соотношений (441.1)

$$\frac{R}{\mathcal{E}} = \frac{r_1 + r_2 e^{-i\delta}}{1 + r_1 r_2 e^{-i\delta}}. \quad (442.1)$$

443. При отражении от идеального зеркала может меняться только фаза, но не амплитуда волны. Поэтому для коэффициента Френеля при таком отражении можно написать $r_2 = e^{i\alpha}$. Подставляя это значение в формулу (442.1), получим

$$\frac{R}{\mathcal{E}} = \frac{r_1 + e^{i(\alpha-\delta)}}{1 + r_1 e^{i(\alpha-\delta)}},$$

откуда

$$\left| \frac{R}{\mathcal{E}} \right|^2 = \frac{r_1^2 + 1 + 2r_1 \cos(\alpha - \delta)}{1 + r_1^2 + 2r_1 \cos(\alpha - \delta)} = 1.$$

444. Оптическая толщина пленки должна быть равна четверти длины световой волны в вакууме. Показатель преломления пленки $n' = \sqrt{n}$, где n — показатель преломления стекла. Отражения не будет также в том случае, когда оптическая толщина пленки $ln' = l\sqrt{n} = \lambda/4 + N\lambda/2$, где N — целое число. Однако при пользовании белым светом применять толстые пленки невыгодно.

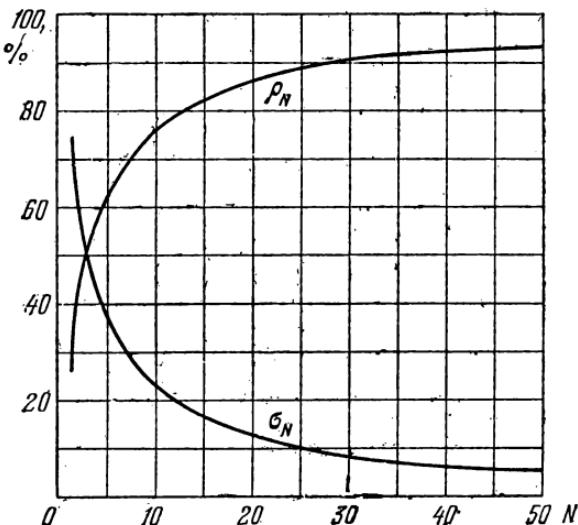


Рис. 131.

Точное решение задачи можно получить с помощью формулы (442.1). Тот же результат можно получить более просто, если не учитывать многократные отражения, а рассмотреть интерференцию волн, однократно отразившихся от верхней и нижней границ пленки.

$$445. \rho = \rho_1 + \rho_2 \sigma_1^2 + \rho_2 \sigma_1^2 \rho_1 \rho_2 + \dots = \rho_1 + \frac{\rho_2 \sigma_1^2}{1 - \rho_1 \rho_2},$$

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2 \rho_1 \rho_2 + \sigma_1 \sigma_2 (\rho_1 \rho_2)^2 + \dots = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{1 - \rho_1 \rho_2}.$$

446. Решение. Присоединим к системе m плоскостей одну такую же $(m+1)$ -ю плоскость. Первые m плоскостей можно заменить одной плоскостью с коэффициентами отражения и пропускания ρ_m и σ_m . Тогда задача будет сведена к предыдущей, и мы получим для коэффициентов отражения и пропускания $(m+1)$ плоскостей

$$\rho_{m+1} = \rho_m + \rho \frac{\sigma_m^2}{1 - \rho \rho_m}, \quad \sigma_{m+1} = \frac{\sigma \sigma_m}{1 - \rho \rho_m}.$$

Отсюда методом доказательства от m к $m+1$ нетрудно получить

$$\rho_m = \frac{m\rho}{1 + (m-1)\rho}, \quad \sigma_m = \frac{1-\rho}{1 + (m-1)\rho}.$$

$$447. \rho_N = \frac{2N}{2N+5,76}, \quad \sigma_N = \frac{5,76}{2N+5,76} \text{ (см. рис. 131).}$$

$$448. \Delta = \frac{N(\rho_s - \rho_p)}{(2N-1)\rho_s\rho_p - (N-1)(\rho_s + \rho_p) - 1},$$

$$\Delta' = \frac{\rho_s - \rho_p}{2(N-1)\rho_s\rho_p + (\rho_s + \rho_p)}, \quad \frac{I_s}{I_p} = \frac{1-\rho_s}{1-\rho_p} \frac{(2N-1)\rho_p + 1}{(2N-1)\rho_s + 1},$$

где ρ_s и ρ_p — коэффициенты отражения волн, поляризованных в плоскости падения и перпендикулярно к ней, для одной отражающей поверхности:

$$\rho_s = \left(\frac{\cos \varphi - n \cos \psi}{\cos \varphi + n \cos \psi} \right)^2, \quad \rho_p = \left(\frac{n \cos \varphi - \cos \psi}{n \cos \varphi + \cos \psi} \right)^2.$$

$$449. \Delta = \frac{\cos^2(\varphi - \psi) - \cos^2(\varphi + \psi)}{\cos^2(\varphi - \psi) + \cos^2(\varphi + \psi)} = 0, 0; 0,82; 1,0; 0,0.$$

$$450. -0,015; -0,091; -0,176; -0,402.$$

451.

N	1	2	3	4	5
$-\Delta = \frac{N}{N+5,76}$	0,148	0,258	0,342	0,409	0,466
N	6	7	8	9	10
$-\Delta = \frac{N}{N+5,76}$	0,512	0,548	0,582	0,611	0,635

452. Решение. Из формулы Френеля

$$\frac{R_p}{\mathcal{E}_p} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)}$$

следует, что R_p меняет знак при переходе через угол Брюстера. Физически это означает, что при таком переходе R_p претерпевает скачкообразное изменение фазы на π . При строгой справедливости формулы Френеля это не вело бы к нарушению непрерывности электромагнитного поля, так как при угле Брюстера $R_p = 0$. В действительности R_p не обращается в нуль ни при каком угле падения. Поэтому должна существовать окрестность угла Брюстера (обычно довольно узкая), при переходе через которую фаза R_p меняется

непрерывно от 0 до π . Для света, электрический вектор которого перпендикулярен к плоскости падения, подобной окрестности не существует. Поэтому из нестрогого соблюдения закона Брюстера вытекает эллиптическая поляризация отраженного света, о которой шла речь в условии задачи. Обратное заключение можно получить, если разложить падающую волну на компоненты с колебаниями в плоскости падения и перпендикулярно к ней и принять во внимание, что эти компоненты в линейном приближении отражаются независимо друг от друга (принцип суперпозиции).

$$453. \quad \begin{aligned} \frac{R_s}{\mathcal{E}_s} &= \frac{\sqrt{\epsilon_1/\mu_1} \cos \varphi - \sqrt{\epsilon_2/\mu_2} \cos \psi}{\sqrt{\epsilon_1/\mu_1} \cos \varphi + \sqrt{\epsilon_2/\mu_2} \cos \psi}, \\ \frac{R_p}{\mathcal{E}_p} &= \frac{\sqrt{\epsilon_2/\mu_2} \cos \varphi - \sqrt{\epsilon_1/\mu_1} \cos \psi}{\sqrt{\epsilon_2/\mu_2} \cos \varphi + \sqrt{\epsilon_1/\mu_1} \cos \psi}, \\ \frac{D_s}{\mathcal{E}_s} &= \frac{2\sqrt{\epsilon_1/\mu_1} \cos \varphi}{\sqrt{\epsilon_1/\mu_1} \cos \varphi + \sqrt{\epsilon_2/\mu_2} \cos \psi}, \\ \frac{D_p}{\mathcal{E}_p} &= \frac{2\sqrt{\epsilon_1/\mu_1} \cos \varphi}{\sqrt{\epsilon_2/\mu_2} \cos \varphi + \sqrt{\epsilon_1/\mu_1} \cos \psi}. \end{aligned}$$

454. Решение. Если закон Брюстера имеет место, то угол Брюстера, при котором не отражается p -компоненты электрического поля, определяется выражением

$$\operatorname{tg} \varphi_B = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \epsilon_2 \mu_1 - \epsilon_1 \mu_2}{\epsilon_1 \epsilon_2 \mu_2 - \epsilon_1 \mu_1}}. \quad (454.1)$$

Возможен случай, когда не будет отражаться s -компоненты. Угол, при котором это имеет место, определяется уравнением

$$\operatorname{tg} \varphi'_B = \sqrt{\frac{\mu_2 \epsilon_2 \mu_1 - \epsilon_1 \mu_2}{\mu_1 \epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2}}. \quad (454.2)$$

Оба случая взаимно исключают друг друга, так как знаки подкоренных выражений в (454.1) и (454.2) противоположны. Если ϵ и μ существенно положительны, то всегда существует угол, при котором не отражается либо p -, либо s -компоненты падающей волны. Для определения этого угла «полней поляризации» надо пользоваться той из формул (454.1) или (454.2), у которой подкоренное выражение положительно.

456. Не нарушая общности, можно так выбрать положительные направления отклонений в обеих волнах, чтобы разность фаз между ними лежала в пределах от 0 до π . Тогда конец результирующего вектора двух складываемых векторов будет описывать эллипс в направлении от вектора, опережающего по фазе, к вектору, отстающему по фазе.

457. Искомый угол ϕ определяется из уравнения

$$\sin^4 \phi - \frac{n^2 + 1}{n^2} \cos^2 \frac{\pi}{8} \sin^2 \phi + \frac{1}{n^2} \cos^2 \frac{\pi}{8} = 0,$$

которое дает $\phi_1 = 60^\circ 32'$, $\phi_2 = 38^\circ 42'$.

458. Левая.

$$459. \phi = \arcsin \sqrt{\frac{2n^2}{1+n^2}}, \quad \delta = 2 \operatorname{arctg} \frac{1-n^2}{2n},$$

где n — показатель преломления второй (оптически менее плотной) среды относительно первой ($n < 1$).

$$460. n \geq \frac{1}{\sqrt{2}-1} \approx 2,41.$$

461. Нельзя.

$$462. n = \frac{1 + \sin(3\pi/8)}{\cos(3\pi/8)} = 5,028. \text{ Так как веществ с показателем}$$

преломления 5 не существует, то в оптике осуществить этот случай нельзя. Его можно было бы осуществить с более длинными электромагнитными волнами.

463. $6^\circ 29'$ или $44^\circ 38'$. Правая.

464. $69^\circ 21'$ или $42^\circ 46'$. Правая.

$$465. n = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = 2,4143; A = 35^\circ 34'.$$

466. Решение. Допустим, что электрический вектор колеблется перпендикулярно к плоскости падения. Рассмотрим электрическое поле в первой среде в какой-либо точке на границе раздела. Электрическое поле падающей волны в этой точке меняется во времени по гармоническому закону. Его можно представить вектором \vec{OA} , равномерно вращающимся вокруг точки O с угловой скоростью ω (рис. 132). Проекция конца этого вектора на плоскость границы

разделяет значение электрического поля падающей волны в рассматриваемой точке в данный момент времени. Электрическое поле отраженной волны можно представить вектором \vec{AB} той же самой длины и вращающимся с той же скоростью вокруг точки A . Угол δ между векторами \vec{OA} и \vec{AB} есть скачок фазы при отражении. Результирующее поле в рассматриваемой точке первой среды изображается вектором $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$, вращающимся вокруг точки O . В силу непрерывности тангенциальных компонент электрического поля тот

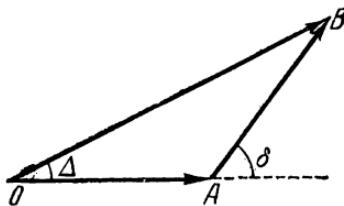


Рис. 132.

же вектор \overrightarrow{OB} будет изображать электрическое поле и по другую сторону границы раздела, т. е. поле преломленной волны. Значит, угол Δ (рис. 130) есть скачок фазы, испытываемый волной при проникновении во вторую среду. Так как треугольник OAB — равнобедренный, то $\delta = 2\Delta$. Доказательство нетрудно распространить и на тот случай, когда электрический вектор колеблется в плоскости падения.

467. $n > 3,732$.

468. Решение. Поместим начало координат на верхней границе слоя и введем обозначение $\zeta = z + a$. Тогда можно написать

$$k_0 n = p/\zeta, \quad (468.1)$$

где p — постоянная, а k_0 — волновое число в вакууме. На верхней границе слоя $z = 0$, а следовательно, $\zeta = a$. Обозначим через b значение ζ на нижней границе слоя. Очевидно,

$$l = b - a, \quad k_0 n_1 = p/a, \quad k_0 n_2 = p/b,$$

откуда

$$\begin{aligned} a &= \frac{n_2}{n_1 - n_2} l, \quad b = \frac{n_1}{n_1 - n_2} l, \\ p &= \frac{n_1 n_2}{n_1 - n_2} k_0 l = 2\pi \frac{n_1 n_2}{n_1 - n_2} \frac{l}{\lambda}, \end{aligned} \quad (468.2)$$

$$n = \frac{n_1 n_2}{n_2 (1 - z/l) + n_1 z/l}. \quad (468.3)$$

Если падающая волна линейно-поляризована, то отраженная и прошедшая волны, а также поле внутри слоя будут тоже поляризованы линейно и притом в той же плоскости. Пусть электрическое поле E параллельно оси Y , а магнитное H параллельно оси X . Внутри слоя

$$\partial E / \partial \zeta = -ik_0 H, \quad \partial H / \partial \zeta = -ik_0 n^2 E. \quad (468.4)$$

Исключая H , получим

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \zeta^2} + \frac{p^2}{\zeta^2} E = 0. \quad (468.5)$$

Общее решение этого уравнения

$$E = V \bar{\zeta} (A \zeta^q + B \zeta^{-q}), \quad (468.6)$$

где A и B — произвольные постоянные, а q определяется уравнением

$$q^2 = 1/4 - p^2. \quad (468.7)$$

Из (468.4) и (468.6) получаем

$$H = \frac{i}{k_0 V \bar{\zeta}} \left\{ \left(q + \frac{1}{2} \right) A \zeta^q - \left(q - \frac{1}{2} \right) B \zeta^{-q} \right\}. \quad (468.8)$$

На верхней границе слоя $E = \mathcal{E} + R$, $H = n_1 (R - \mathcal{E})$. На нижней границе $E = D e^{-ik_0 n_2 l}$, $H = -n_2 D e^{-ik_0 n_2 l}$. Приравнивая эти вели-

чины значениям E и H на границах слоя, вычисленным из (468.6) и (468.8), найдем

$$\begin{aligned} \sqrt{a}(Aa^q + Ba^{-q}) &= \mathcal{E} + R, \\ \frac{i\sqrt{a}}{p} \left[\left(q + \frac{1}{2}\right) Aa^q - \left(q - \frac{1}{2}\right) Ba^{-q} \right] &= R - \mathcal{E}, \\ \sqrt{b}(Ab^q + Bb^{-q}) &= De^{-ik_0 n_2 l}, \\ \frac{i\sqrt{b}}{p} \left[\left(q + \frac{1}{2}\right) Ab^q - \left(q - \frac{1}{2}\right) Bb^{-q} \right] &= -De^{-ik_0 n_2 l}. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, после несложных преобразований получим

$$\frac{R}{\mathcal{E}} = -\frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh} \alpha}{q \operatorname{ch} \alpha + ip \operatorname{sh} \alpha}, \quad \frac{D}{\mathcal{E}} = \frac{q \sqrt{n_1/n_2}}{q \operatorname{ch} \alpha + ip \operatorname{sh} \alpha} e^{ik_0 n_2 l}, \quad (468.9)$$

где

$$\alpha = q \ln(n_2/n_1). \quad (468.10)$$

Представлять решение в этой форме удобно, если $p^2 < 1/4$, т. е. когда величина q вещественна. Если же $p^2 > 1/4$, то $q^2 < 0$. В этом случае q и α чисто мнимые. Положим

$$\alpha = i\alpha', \quad q = iq', \quad (468.11)$$

где α' и q' вещественны. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{R}{\mathcal{E}} &= -\frac{1}{2} \frac{\sin \alpha'}{q' \cos \alpha' + ip \sin \alpha'}, \\ \frac{D}{\mathcal{E}} &= \frac{q' \sqrt{n_1/n_2}}{q' \cos \alpha' + ip \sin \alpha'} e^{ik_0 n_2 l}. \end{aligned} \quad (468.12)$$

Промежуточный случай $p^2 = 1/4$ соответствует $q = q' = 0$. В этом случае обе формулы (468.9) и (468.12) приводят к неопределенности вида 0/0. Раскрывая ее обычными методами, получим

$$\frac{R}{\mathcal{E}} = \frac{\ln(n_2/n_1)}{2 + i \ln(n_2/n_1)}, \quad \frac{D}{\mathcal{E}} = \frac{2 \sqrt{n_1/n_2}}{2 + i \ln(n_2/n_1)} e^{ik_0 n_2 l}. \quad (468.13)$$

Если $l = 0$, то $p = 0$, $q = 1/2$, и формулы (468.9) дают

$$\begin{aligned} \frac{R}{\mathcal{E}} &= -\operatorname{th} \alpha = -\operatorname{th}(\ln \sqrt{n_2/n_1}) = -\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}, \\ \frac{D}{\mathcal{E}} &= \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha} \sqrt{n_1/n_2} = \frac{\sqrt{n_1/n_2}}{\operatorname{ch}(\ln \sqrt{n_2/n_1})} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1}, \end{aligned}$$

Те же результаты, как первое приближение, получаются при $l \ll \lambda$. Таким образом, если толщина переходного слоя очень мала по сравнению с длиной волны, то, как и следовало ожидать, отражение и преломление происходят практически так же, как и в случае резкой границы.

Рассмотрим другой крайний случай, когда $l \gg \lambda$. В этом случае $p^2 \gg 1$, и в формуле (468.7) членом $1/4$ можно пренебречь, т. е. полу-

жить $q' = p$. Тогда из (468.12) получаем для коэффициента отражения

$$\rho = \left| \frac{R}{\mathcal{E}} \right|^2 = \frac{\sin^2 \{ p \ln(n_2/n_1) \}}{4p^2}. \quad (468.14)$$

Отсюда видно, что коэффициент отражения ρ является осциллирующей затухающей функцией толщины слоя l . Амплитуды этих осцилляций

$$\rho_{\max} = \frac{1}{4p^2} = \left(\frac{n_1 - n_2}{4\pi n_1 n_2} \right)^2 \left(\frac{\lambda}{l} \right)^2 \quad (468.15)$$

убывают обратно пропорционально квадрату толщины переходного слоя. Таким образом, для слоев, толщина которых велика по сравнению с длиной волны, отражение практически отсутствует. Этот вывод не связан со специальным законом изменения показателя преломления (468.3), а относится к любым толстым переходным слоям с плавно меняющимся показателем преломления.

469. Решение. Поперечность электромагнитной волны, а также уравнение (469.1) непосредственно следуют из уравнений Максвелла. Для получения приближенных решений уравнения (469.1) будем искать частное решение в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}(z) \exp \left\{ i \frac{\omega}{c} \Phi(z) \right\},$$

где $\mathbf{A}(z)$ и $\Phi(z)$ — вещественные функции. После подстановки в (469.1) и отделения вещественных частей от мнимых получим два уравнения:

$$\frac{d^2 \mathbf{A}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{A} \left\{ n^2 - \left(\frac{d\Phi}{dz} \right)^2 \right\} = 0, \quad (469.3)$$

$$2 \frac{d\mathbf{A}}{dz} \frac{d\Phi}{dz} + \mathbf{A} \frac{d^2 \Phi}{dz^2} = 0. \quad (469.4)$$

Если

$$\left| \frac{d^2 \mathbf{A}}{dz^2} \right| \ll \frac{\omega^2}{c^2} |\mathbf{A}|, \quad (469.5)$$

то в (469.3) первый член может быть отброшен, что приводит к уравнению

$$(d\Phi/dz)^2 = n^2, \quad (469.6)$$

из которого находим

$$\Phi = \pm \int_{z_0}^z n(z) dz. \quad (469.7)$$

После этого уравнение (469.4) дает

$$\frac{d}{dz} (A^2 n) = 0, \quad A = \frac{\text{const}}{\sqrt{n}}. \quad (469.8)$$

Общее решение:

$$E = \frac{C_1}{\sqrt{n}} \exp \left\{ \frac{i\omega}{c} \int_{z_{01}}^z n(z) dz \right\} + \frac{C_2}{\sqrt{n}} \exp \left\{ -\frac{i\omega}{c} \int_{z_{02}}^z n(z) dz \right\}, \quad (469.9)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, вообще говоря, комплексные. Заметим, что произвольных постоянных в этом решении только две, так как выбором C_1 и C_2 всегда можно придать постоянным z_{01} и z_{02} любые, наперед заданные значения.

Используя (469.8), нетрудно показать, что (469.3) выполняется при соблюдении двух условий:

$$\frac{\lambda}{2\pi} \left| \frac{dn}{dz} \right| \ll n, \quad \frac{\lambda}{2\pi} \left| \frac{d^2n}{dz^2} \right| \leq \left| \frac{dn}{dz} \right|, \quad (469.10)$$

где $\lambda = 2\pi c/\omega n$ — длина волны в среде. Так как $\lambda n = \text{const}$, то первое из этих условий может быть также записано в виде

$$|d\lambda/dz| \ll 2\pi. \quad (469.11)$$

470. Решение. Вычисление средней по времени плотности потока энергии

$$\bar{S} = \frac{c}{4\pi} \overline{[EH]}$$

для каждой из волн, о которых говорится в условии задачи, показывает, что $\bar{S} = \text{const}$, т. е. \bar{S} не зависит от z . Отсюда следует, что волна распространяется без отражения.

471. Утверждение проверяется прямой подстановкой. Доказательство отсутствия отражения производится так же, как в предыдущей задаче.

472. Решение. Поместив начало координат на границе раздела сред и обозначив через \mathcal{E}, R, D амплитуды падающей, отраженной и прошедшей волн, для электрического поля в первой и второй средах можем написать:

$$E_1 = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{n}} \exp \left\{ -i \frac{\omega}{c} \int_0^z n(z) dz \right\} + \frac{R}{\sqrt{n}} \exp \left\{ i \frac{\omega}{c} \int_0^z n(z) dz \right\},$$

$$E_2 = \frac{D}{\sqrt{n}} \exp \left\{ -i \frac{\omega}{c} \int_0^z n(z) dz \right\}.$$
(472.1)

В силу непрерывности тангенциальных компонент электрического вектора

$$\mathcal{E} + R = D. \quad (472.2)$$

Непрерывность тангенциальных компонент магнитного вектора, как легко убедиться с помощью уравнений Максвелла, может быть

выражена равенством

$$dE_1/dz = dE_2/dz, \quad (472.3)$$

которое должно выполняться на границе раздела сред. Подставляя сюда выражения (472.1), из получающегося соотношения и из (472.2) легко найти

$$\frac{R}{C} = ic \frac{(dn/dz)_2 - (dn/dz)_1}{4\omega n^2(0)} = \frac{i\lambda_0}{8\pi n^2(0)} [(dn/dz)_2 - (dn/dz)_1]. \quad (472.4)$$

При этом в знаменателе мы пренебрегли малой величиной $(dn/dz)_2 - (dn/dz)_1$, по сравнению с $2\pi c/\omega$. Коэффициент отражения получается возведением модуля выражения (472.4) в квадрат.

§ 7. Кристаллооптика

473. Решение. Плоская волна в кристалле имеет вид

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad \mathbf{D} = D_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad \mathbf{H} = H_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (473.1)$$

где $\mathbf{E}_0, \mathbf{D}_0, \mathbf{H}_0$ —постоянные векторы, а \mathbf{k} —волновой вектор, связанный с нормальной скоростью волны v соотношением

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{v} \mathbf{N}.$$

Подставим выражения (473.1) в уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (473.2)$$

Дифференцирование векторов (473.1) по времени сводится к умножению на $i\omega$, а дифференцирование по координатам x, y, z —к умножению на $-ik_x, -ik_y, -ik_z$. Поэтому

$$\text{rot } \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = -i \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ k_x & k_y & k_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = -i [\mathbf{k} \mathbf{H}]$$

и аналогично для $\text{rot } \mathbf{E}$. Подстановка в (473.2) дает

$$\mathbf{D} = -\frac{c}{v} [\mathbf{N} \mathbf{H}], \quad \mathbf{H} = \frac{c}{v} [\mathbf{N} \mathbf{E}]. \quad (473.3)$$

474. Результат непосредственно следует из формул (473.3), а также из выражения для вектора Пойнтинга $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \mathbf{H}]$.

475. 1) Вектор \mathbf{D} перпендикулярен к главному сечению. В этом случае векторы \mathbf{D} и \mathbf{E} одинаково направлены, а потому

$$\mathbf{D} = \epsilon_{\perp} \mathbf{E}. \quad (475.2)$$

В скалярной форме уравнения (473.3) имеют вид

$$D = \frac{c}{v} H, \quad H = \frac{c}{v} E, \quad (475.3)$$

или

$$\epsilon_{\perp} E = \frac{c}{v} H, \quad H = \frac{c}{v} E. \quad (475.4)$$

Почленным перемножением этих уравнений находим

$$v = v_o = c / \sqrt{\epsilon_{\perp}}. \quad (475.5)$$

Этот результат можно было предвидеть заранее, так как в рассматриваемом случае связь (475.2) между векторами D и E такова, как если бы среда была изотропна. Рассматриваемая волна и ее показатель преломления $n_o = \sqrt{\epsilon_{\perp}}$ называются обычными.

2) Вектор D лежит в главном сечении кристалла. Так как векторы E , D , N лежат в одной плоскости (см. задачу 474), то вектор E можно представить в виде

$$E = E_D + E_N,$$

где E_D и E_N — составляющие этого вектора вдоль D и N соответственно.

Тогда $[NE] = [NE_D]$ и уравнения (473.3) в скалярной форме примут вид

$$D = \frac{c}{v} H, \quad H = \frac{c}{v} E_D. \quad (475.6)$$

Очевидно,

$$E_D = \frac{(ED)}{D} = \frac{E_{\parallel} D_{\parallel} + E_{\perp} D_{\perp}}{D} = \frac{1}{D} \left(\frac{D_{\parallel}^2}{\epsilon_{\parallel}} + \frac{D_{\perp}^2}{\epsilon_{\perp}} \right).$$

Как видно из чертежа (рис. 133), $D_{\parallel} = D \sin \alpha$, $D_{\perp} = D \cos \alpha$, где α — угол между оптической осью кристалла и волновой нормалью. Следовательно, $E_D = D (\sin^2 \alpha / \epsilon_{\parallel} + \cos^2 \alpha / \epsilon_{\perp})$. Если ввести обозначение

$$\frac{1}{\epsilon} = \frac{\sin^2 \alpha}{\epsilon_{\parallel}} + \frac{\cos^2 \alpha}{\epsilon_{\perp}} = \frac{N_{\perp}^2}{\epsilon_{\parallel}} + \frac{N_{\parallel}^2}{\epsilon_{\perp}}, \quad (475.7)$$

то связь между D и E_D представится в виде $D = \epsilon E_D$. Уравнение (475.5) будет отличаться от уравнения (475.4) заменой E на E_D , а ϵ_{\perp} — на ϵ . Отсюда следует, что скорость волны будет определяться выражением $v = v_o = c / \sqrt{\epsilon}$, а ее показатель преломления —

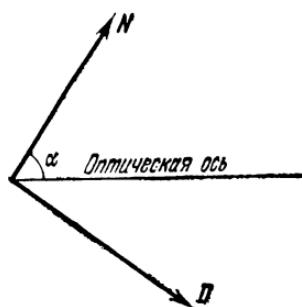


Рис. 133.

выражением

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_e^2} = \frac{N_{\perp}^2}{\epsilon_{\parallel}} + \frac{N_{\parallel}^2}{\epsilon_{\perp}}. \quad (475.8)$$

Такая волна называется необыкновенной.

476. Волна распадается на две волны: обыкновенную с электрическим вектором, перпендикулярным к главному сечению кристалла, и необыкновенную, вектор D которой лежит в главном сечении. Направления волновых нормалей обеих волн будут совпадать, но их скорости, вообще говоря, будут разными. Если волновая нормаль направлена вдоль оптической оси, то волны будут распространяться так же, как в изотропной среде.

477. В кристалле направление луча определяется вектором Пойнтинга $S = \frac{c}{4\pi} [EH]$. Поэтому необыкновенный луч в общем случае не совпадает по направлению с волновой нормалью. Волновые нормали всегда лежат в плоскости падения, а необыкновенный луч может выходить из нее даже при нормальному падении. В последнем случае волновые фронты обыкновенной и необыкновенной волн при вступлении в кристалл не преломляются, а необыкновенный луч наклонен к ним и может выходить из плоскости падения. Если бы волновой фронт был неограниченным, то пространственного разделения обыкновенного и необыкновенного лучей не происходило бы. Оно возникает лишь при ограничении световых пучков диафрагмами.

478. Лучи, исходящие из какой-либо точки A удаленного предмета и попадающие в глаз наблюдателя, практически параллельны. Каждый луч при вступлении в плоскопараллельную кристаллическую пластинку распадается на два луча. Оба луча по выходе из пластиинки остаются параллельными, хотя они и испытали различные боковые смещения. Глаз собирает оба луча в одной и той же точке сетчатки, поскольку он аккомодирован на рассматривание удаленных предметов (на бесконечность). Эта точка схождения лучей и будет (единственным) изображением точки A .

479. $f = 5$ см.

480. Показатели преломления дают отношения нормальных скоростей.

481. Для определения показателя преломления обыкновенного луча пластиинка может быть ориентирована как угодно. Чтобы получить главный показатель преломления необыкновенного луча, ее надо ориентировать так, чтобы плоскость, проходящая через оптическую ось кристалла и нормаль к границе раздела пластиинки со стеклом кристалл-рефрактометра, была перпендикулярна к плоскости падения.

Решение. Действие кристалл-рефрактометра основано на полном внутреннем отражении. Пластиинка исследуемого кристалла

кладется на поверхность стекла с очень высоким (до 2) показателем преломления N . Свет падает со стороны стекла и отражается от пластиинки. Показатель преломления n исследуемого вещества вычисляется по предельному углу полного внутреннего отражения по формуле $n = N \sin \varphi$. В случае отражения от кристалла существуют два предельных угла, соответствующих обыкновенному и необыкновенному лучам. Предельный угол для обыкновенного луча не зависит от ориентации пластиинки и, следовательно, может быть измерен при любой ориентации. Предельный угол необыкновенного луча изменяется с изменением ориентации пластиинки.

Для простоты рассуждений предположим, что падающий свет всегда поляризован так, что в кристалле возникает лишь необыкновенная волна. Вообще говоря, при полном внутреннем отражении световое поле проникает во «вторую» среду в виде неоднородной (поверхностной) волны. Но если свет падает строго под предельным углом полного внутреннего отражения, то волна во второй среде будет однородна. Она распространяется параллельно границе раздела. Ее волновая нормаль во второй среде параллельна линии пересечения плоскости падения с плоскостью раздела сред. Повернем кристалл так, чтобы его оптическая ось стала перпендикулярна к этой линии. Тогда волна в кристалле будет распространяться перпендикулярно к оптической оси. Известно, что в этом случае всякая однородная волна распадается на обыкновенную с электрическим вектором, перпендикулярным к оптической оси, и необыкновенную, электрический вектор которой параллелен оптической оси. Итак, при такой ориентировке кристалла электрический вектор необыкновенной волны параллелен оптической оси. Значит, на кристалл-рефрактометре в этом случае будет измерен главный показатель преломления необыкновенной волны.

482. Кристалл отрицателен, пластиинка вырезана параллельно оптической оси.

483. Оба показателя будут иметь постоянные значения, соответствующие минимальному и максимальному значениям, приведенным в предыдущей задаче.

484. Оптическая ось должна быть параллельна преломляющему ребру призмы.

485. Пластиинка должна быть вырезана параллельно оптической оси: $d_1 = 0,603$ мм; $d_2 = 0,673$ мм.

486. На экране образуются 4 пятна. Интенсивности относятся как 1:3:1:3.

487. Уменьшится в отношении 3:2.

488. В стекле и фарах автомашины главные плоскости поляроидов должны быть параллельны между собой и составлять угол 45° с

горизонтом. При этом у всех машин они должны быть повернуты в одну и ту же сторону (считая по ходу машины).

$$489. \varphi = 5^{\circ}17'.$$

$$490. \Delta R = 5,16 \text{ мкм.}$$

491. Через призмы проходит необыкновенный луч. Вторая призма пропускает больше света. В обоих случаях угол α должен удовлетворять условию $1/n_o < \sin \alpha < 1/n_e$, откуда $37^{\circ}6' < \alpha < 42^{\circ}18'$, $\delta = 6^{\circ}15'$.

492. Решение. Векторы E и D необыкновенной волны лежат в главном сечении кристалла. В том же сечении лежат векторы N и s , причем угол δ между этими векторами равен углу между векторами E и D (см. задачу 475). Пусть α и β — углы, образуемые векторами E и D с оптической осью кристалла. Тогда

$$D_{||} = D \cos \beta = \epsilon_{||} E_{||} = \epsilon_{||} E \cos \alpha,$$

$$D_{\perp} = D \sin \beta = \epsilon_{\perp} E_{\perp} = \epsilon_{\perp} E \sin \alpha.$$

Отсюда

$$\tan \beta = \frac{\epsilon_{\perp}}{\epsilon_{||}} \tan \alpha = \frac{n_o^2}{n_e^2} \tan \alpha.$$

Исландский шпат — отрицательный кристалл ($n_o > n_e$), так что $\beta > \alpha$. Для угла δ получаем

$$\tan \delta = \tan (\beta - \alpha) = \frac{(n_o^2 - n_e^2) \tan \beta}{n_o^2 + n_e^2 \tan^2 \beta}.$$

Из этой формулы легко получить следующее выражение для максимального значения угла δ :

$$\tan \delta = \frac{n_o^2 - n_e^2}{2n_o n_e}.$$

$$493. d = \frac{\lambda}{4(n_1 - n_2)} = 0,027 \text{ мм.}$$

$$494. d = \frac{\lambda}{4(n_e - n_o)} = 0,014 \text{ мм.}$$

$$495. \frac{2l}{\lambda} (\sqrt{\epsilon_y} - \sqrt{\epsilon_z}) = 2m + \frac{1}{2}, \text{ где } m \text{ — целое число.}$$

496. При введении пластинки в полволны интерференционные полосы смещаются на половину ширины полосы; при повороте поляроида на 90° они смещаются в противоположную сторону на половину ширины полосы относительно начального положения; если убрать поляроид, то положение интерференционных полос не изменится, но интенсивность их возрастет вдвое. При введении пластиинки в четверть волны происходит смещение полос на четверть ширины полосы; если в этом случае убрать поляроид, то интерференционные полосы пропадут.

497. Решение. Пусть I_p — интенсивность поляризованного света, а I_e — интенсивность естественного света. При первом

положении николя интенсивность прошедшего света равна

$$I_{\text{п}} + \frac{1}{2} I_{\text{e}},$$

а при втором

$$I_{\text{п}} \cos^2 60^\circ + \frac{1}{2} I_{\text{e}} = \frac{1}{4} I_{\text{п}} + \frac{1}{2} I_{\text{e}}.$$

По условию

$$I_{\text{п}} + \frac{1}{2} I_{\text{e}} = 2 \left(\frac{1}{4} I_{\text{п}} + \frac{1}{2} I_{\text{e}} \right),$$

откуда $I_{\text{п}} = I_{\text{e}}$. Максимальная интенсивность $I_s = \frac{3}{2} I_{\text{п}}$, минимальная $I_p = \frac{1}{2} I_{\text{п}}$; $\Delta = \frac{1}{2}$, $I_s/I_p = 3$.

$$498. \frac{I_{\text{k}}}{I_{\text{п}}} = \frac{\sin^2 \alpha - p/100}{p/200} = \frac{1}{2}.$$

$$499. \frac{I_{\text{k}}}{I_{\text{п}}} = \frac{2}{m^2 - 1} = \frac{2}{3}.$$

$$500. \frac{I_{\text{k}}}{I_{\text{п}}} = 2 \left(\frac{\sqrt{m} - 1}{\sqrt{m} + 1} \right)^2 \approx 0,058.$$

$$501. \frac{I_{\text{k}}}{I_{\text{e}}} = \frac{m - 1}{2} = 1.$$

502. Свет будет поляризован по левому кругу.

503. Свет останется линейно-поляризованным, но плоскость колебаний электрического вектора повернется на угол 2α и станет симметрично расположенной со своим исходным положением относительно оси пластиинки в полволны.

$$504. \beta_1 = -\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} = -35^\circ,$$

$$\beta_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} = +55^\circ.$$

Решение. Свет не пройдет через второй николь, если электрический вектор перпендикулярен к главной плоскости этого николя, т. е. параллелен прямой AB , перпендикулярной к той же плоскости

(рис. 134). Ось пластиинки должна быть ориентирована по биссектрисе угла AON_1 или угла N_1OB , ему дополнительного до π (см. предыдущую задачу). Это дает два значения угла β , приведенных в ответе.

$$505. \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p}{100} \right)^2 \cos^2 \alpha = 0,1.$$

506. Возможны два решения:

$$1) \beta = \frac{\alpha}{2}, \quad I = \frac{I_0}{2} \cos^4 \frac{\alpha}{2};$$

$$2) \beta = \frac{\alpha - \pi}{2}, \quad I = \frac{I_0}{2} \sin^4 \frac{\alpha}{2},$$

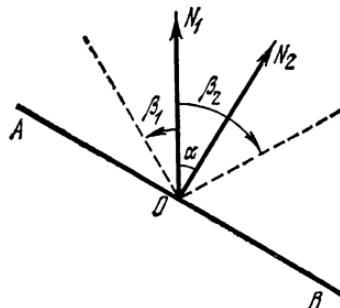


Рис. 134.

где β — угол, на который должен быть повернут николь N_3 относительно николя N_1 .

507. Решение. Условие образования темной полосы минимального порядка будет либо $d(n_e - n_o) = m\lambda_2 + 1/4\lambda_2$ либо $d(n_e - n_o) = m\lambda_2 + 3/4\lambda_2$, в зависимости от направления вращения и ориентации николя. Здесь λ_2 — наибольшая длина волны в падающем свете, для которой m есть целое число. Аналогичное условие для минимальной длины волны λ_1 будет либо $d(n_e - n_o) = (m+k)\lambda_1 + 1/4\lambda_1$, либо $d(n_e - n_o) = (m+k)\lambda_1 + 3/4\lambda_1$. Исключая m , в обоих случаях получим

$$k = \frac{d(n_e - n_o)(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1 \lambda_2} = 10.$$

508. 12 полос.

Решение. Разность хода между необыкновенным и обыкновенным лучами, вносимая кварцевой пластинкой, равна $\Delta = d(n_e - n_o)$. Подставляя сюда численные значения d , n_e , n_o , нетрудно убедиться, что эта разность для длин волн λ_D и λ_F практически одинакова. Число длин волн λ_D , укладывающихся на интервале Δ , будет $k_1 = \Delta/\lambda_D$. Соответственно $k_2 = \Delta/\lambda_F$. Число темных полос равно $k_2 - k_1 = 12$, так как темные полосы получаются в местах спектра, соответствующих тем длинам волн, для которых состояние поляризации не изменяется в результате прохождения через кварцевую пластинку, т. е. для которых разность хода Δ составляет целое число длин волн.

509. $m \approx \frac{d_{\max}(n_e - n_o)}{\lambda} \approx 10$ полос.

$$510. A^2 = a^2 \{ \cos^2(\alpha - \beta) - \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2(\delta/2) \},$$

$$A^2 = a^2 \sin^2 2\alpha \sin^2(\delta/2) \text{ (николи скрещены),}$$

$$A^2 = a^2 (1 - \sin^2 2\alpha \sin^2(\delta/2)) \text{ (николи параллельны).}$$

Здесь δ — разность фаз между двумя главными компонентами прошедшей волны, которая вводится пластинкой a — амплитуда падающей волны.

$$511. I = \frac{I_0}{2} \sin^2 2\alpha \sin^2(\delta/2) = 0,19 I_0,$$

$$\text{где } \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d(n_e - n_o) \approx \frac{3}{2}\pi.$$

512. Отношение яркостей: 1) пропорционально квадрату косинуса угла поворота; 2) пропорционально квадрату котангенса угла поворота.

513. Решение. После прохождения через поляризатор свет становится линейно-поляризованным. В кристаллической пластинке он распадается на две волны, поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях и распространяющиеся с различными скоростями. Поэтому если свет монохроматичен, то между этими волнами после прохождения через пластинку возникнет разность фаз, и при сложении они дадут, вообще говоря, эллиптически-поляризованную волну.

Ориентировка и форма эллипса будут зависеть от разности фаз. При одной и той же толщине пластинки они будут меняться с изменением длины волны. В частности, эллипс может вырождаться в прямую. Доля света, проходящего через анализатор, зависит от формы эллипса и его ориентации относительно главной плоскости анализатора. Поэтому если падающий свет белый, то различные монохроматические компоненты его, вообще говоря, в различной степени будут пропущены системой, с чем и связана наблюдаемая окраска.

514. Когда главная плоскость анализатора параллельна главным направлениям в пластинке.

518. У исландского шата очень большая разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей, так что даже в тонких пластинках получаются большие разности хода, при которых интерференция в белом свете невозможна.

517. Решение. Когда пластинки одинаково ориентированы, то вносимая ими разность хода велика, т. е. соответствует высокому порядку интерференции. В белом свете интерференция высоких порядков, как известно, наблюдаться не может. Если одну из пластинок повернуть относительно другой на 90° , то вносимая ими разность хода будет такая же, какая вносится тонкой пластинкой, толщина которой равна разности толщин рассматриваемых пластинок. Если эта разность толщин мала, то может получиться настолько малая разность хода, что будет возможна интерференция в белом свете.

518. 5,97 и 28,57.

519. 14,91 и 19,50.

520. В синий цвет (дополнительный к оранжевому).

521. 1) Когда главные направления пластинки совпадают с главными плоскостями николей; 2) когда пластинка вырезана перпендикулярно к оптической оси; 3) когда разность хода, сообщаемая пластинкой, равна четному числу полуволн.

522. $d = 0,07$ мм.

523. 1) Николи скрещены и пластинки параллельны: разность хода $\Delta R = d_1 \Delta n_1 + d_2 \Delta n_2 \approx 3\lambda_1$, где $\lambda_1 \approx 6000$ Å. Поле зрения окрашено в красный цвет (третьего порядка).

2) Николи параллельны, а пластинки скрещены: $\Delta R = d_1 \Delta n_1 - d_2 \Delta n_2 \approx \lambda_2 \approx 5000$ Å. Поле зрения окрашено в зеленый цвет (первого порядка).

$$524. l = \frac{n_e - n_o}{n_e + n_o} \frac{d}{\alpha},$$

525. На частоту 2ω .

526. Надо повернуть на одинаковый угол и анализатор и поляризатор, между которыми вставлена пластинка.

527. При повороте на 360° получаются цвета: 2 раза сине-зеленый второго порядка, 2 раза желтый первого порядка, 2 раза чувствительный оттенок первого порядка.

528. Вследствие плеохроизма.

529. Решение. Поставим на пути света пластинку в четверть волны и николь. После прохождения пластинки свет становится линейно-поляризованным, причем направление колебания электрического вектора составляет угол $\pm 45^\circ$ с осью кристалла. На рис. 135, а

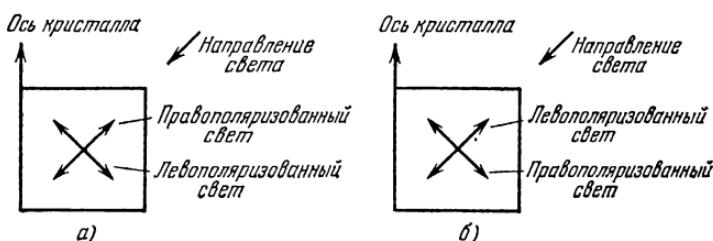


Рис. 135.

указано это направление для правополяризованного и левополяризованного света в случаях, когда пластинка сделана из положительного одноосного кристалла. Направление это определяется с помощью анализатора. Рис. 135, б относится к случаю, когда пластинка сделана из отрицательного кристалла.

530. Решение. Поставим на пути света пластинку в четверть волны и николь. Если при вращении николя и при любом положении пластинки интенсивность не меняется,— естественный свет, если интенсивность меняется и падает до нуля,— поляризованный по кругу свет, если же интенсивность меняется, но не падает до нуля,— частично поляризованный по кругу свет.

Вместо пластинки можно применять компенсатор Бабине и установить его так, чтобы он вносил разность хода в $\lambda/4$.

531. Надо поместить на пути распространения света пластинку в четверть волны, а за ней николь. Если вращением пластинки вокруг направления луча можно найти такое положение, при котором свет, прошедший через нее, можно погасить последующим вращением николя, то падающий свет был эллиптически-поляризован. Если это сделать не удается, то мы имеем дело либо со смесью естественного света с линейно-поляризованным, либо со смесью естественного света с эллиптически-поляризованным. Для того чтобы отличить друг от друга эти два последних случая, на пути света ставят сначала только один николь и устанавливают его на минимум интенсивности проходящего света. Затем перед николем помещают пластинку четверть волны. Вращением пластинки и николя снова добиваются

минимума интенсивности. Если этот минимум интенсивности получается при прежнем положении николя (или при повороте его на 180°), то мы имеем смесь естественного света с линейно-поляризованным. Если же для получения минимума требуется повернуть николь на некоторый угол,— то смесь естественного света с эллиптически-поляризованным.

Вместо пластиинки четверть волны можно применять компенсатор Бабине. Не обязательно устанавливать компенсатор так, чтобы он вносил разность хода точно в $\lambda/4$, а лишь приближенно. Большой точности в такой установке не требуется.

532. 1) $\sin 2I = \sin 2i \sin \delta$; 2) $\operatorname{tg} 2\theta = \operatorname{tg} 2i \cos \delta$, где θ — угол между одним из главных направлений пластиинки и одной из полуосей эллипса, а искомое отношение полуосей равно $\operatorname{tg} I$.

Решение. Линейно-поляризованный луч по выходе из пластиинки превращается в эллиптически-поляризованный, характеризуемый эллипсом колебаний:

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \cos (\omega t + \delta).$$

Для определения полуосей полученного эллиптического колебания найдем компоненты светового вектора x' и y' на оси координат, повернутые на угол θ относительно первоначальной системы осей, совпадающих с главными направлениями пластиинки:

$$\begin{aligned} x' &= a \cos \theta \cos \omega t + b \sin \theta \cos (\omega t + \delta) = A \cos (\omega t + \alpha), \\ y' &= -a \sin \theta \cos \omega t + b \cos (\omega t + \delta) = B \cos (\omega t + \beta), \end{aligned}$$

где A и B определяются из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} A \cos \alpha &= a \cos \theta + b \sin \theta \cos \delta, & A \sin \alpha &= b \sin \theta \sin \delta, \\ B \cos \beta &= -a \sin \theta + b \cos \theta \cos \delta, & B \sin \beta &= b \cos \theta \sin \delta. \end{aligned} \quad (532.1)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} A^2 &= a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta + ab \sin 2\theta \cos \delta, \\ B^2 &= a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta - ab \sin 2\theta \cos \delta. \end{aligned} \quad (532.2)$$

Складывая и вычитая, получаем

$$A^2 - B^2 = a^2 + b^2 = R^2, \quad (532.3)$$

$$A^2 - B^2 = (a^2 - b^2) \cos 2\theta + 2ab \sin 2\theta \cos \delta, \quad (532.4)$$

где R — амплитуда волны, прошедшей через поляризатор. Для того чтобы амплитуды A и B соответствовали колебаниям вдоль осей эллипса, необходимо выбрать угол θ так, чтобы разность $A^2 - B^2$ была максимальной или минимальной. Приравнивая первую производную нулю, получаем

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2ab}{a^2 - b^2} \cos \delta. \quad (532.5)$$

Из (532.1) находим

$$\begin{aligned} AB \sin(\alpha - \beta) &= -ab \sin \delta, \\ AB \cos(\alpha - \beta) &= ab \cos 2\theta \cos \delta - \frac{a^2 - b^2}{2} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (532.6)$$

или

$$\frac{AB \cos(\alpha - \beta)}{ab \cos 2\theta \cos \delta} = 1 - \frac{a^2 - b^2}{2ab \cos \delta} \operatorname{tg} 2\theta.$$

Подставляя вместо $\operatorname{tg} 2\theta$ его значение из (532.5), получаем $\frac{AB \cos(\alpha - \beta)}{ab \cos 2\theta \cos \delta} = 0$, откуда $\cos(\alpha - \beta) = 0$, $(\alpha - \beta) = \pm \pi/2$. Следовательно, из первого уравнения (532.6) имеем $AB = \pm ab \sin \delta$. Так как $b/a = \operatorname{tg} i$, то

$$\sin 2i = \frac{2ab}{a^2 + b^2}, \quad \cos 2i = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{tg} 2i = \frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$

Таким образом, уравнение (532.5) будет иметь следующий вид:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \operatorname{tg} 2i \cos \delta.$$

Полагая $\operatorname{tg} I = B/A$, найдем

$$\sin 2I = \frac{2AB}{A^2 + B^2} = \frac{2ab \sin \delta}{a^2 + b^2} = \sin 2i \sin \delta.$$

533. Решение. Когда угол между главной плоскостью поляризатора и одним из главных направлений исследуемой пластинки равен i и $90^\circ - i$, свет, прошедший через пластинку, имеет одинаковое отношение полуосей B/A (см. решение задачи 532).

Обозначим через 2α угол между одноименными полуосами подобных эллипсов, соответствующих этим случаям. Тогда $2\alpha = 90^\circ - 2(i - \theta)$ или $2\theta = 2(\alpha + i) - 90^\circ$, где θ — угол между одним из главных направлений пластинки и осью эллипса. Из соотношения $\operatorname{tg} 2\theta = \operatorname{tg} 2i \cos \delta$ получаем

$$\cos \delta = \frac{\operatorname{ctg} 2(i + \alpha)}{\operatorname{tg} 2i}.$$

Измерение величин i и α можно провести двояко:

1) Поместив исследуемую пластинку между скрещенными николями, определяют ее главные направления. Повернув затем пластинку на некоторый угол i , помещают за ней вторую пластинку, при помощи которой эллиптическое колебание превращают в прямолинейное. Полученное колебание тушится анализатором. Поворачивают исследуемую пластинку на угол $90^\circ - i$, скрепляют анализатор с компенсирующей пластинкой и, поворачивая его, находят новое положение полного затемнения. Угол поворота анализатора 2α .

2) Компенсирующую пластинку скрепляют с анализатором U , поворачивая его и исследуемую пластинку, находят оба положения

полного затемнения. Тогда угол поворота исследуемой пластинки равен $90^\circ - 2i$ или $90^\circ + 2i$, а угол поворота анализатора 2α .

534. Решение. 1) Если свет поляризован по кругу, то сла-гающие колебания по координатным осям могут быть представлены в виде

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t.$$

После прохождения через кристаллическую пластинку, сообщающую некоторую разность хода, уравнения колебаний могут быть напи-саны так:

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin (\omega t + \delta).$$

При угле α между главной плоскостью анализатора и одним из главных направлений пластиинки результирующее колебание при выходе из анализатора будет

$$a \cos \alpha \cos \omega t + a \sin \alpha \sin (\omega t + \delta) = \\ = a (\cos \alpha + \sin \alpha \sin \delta) \cos \omega t + a \sin \alpha \cos \delta \sin \omega t;$$

отсюда получаем для интенсивности

$$I = a^2 \{(\cos \alpha + \sin \alpha \sin \delta)^2 + (\sin \alpha \cos \delta)^2\} = a^2 (1 + \sin 2\alpha \sin \delta).$$

2) При постоянном значении δ интенсивность достигает макси-мума или минимума, когда $\cos 2\alpha = 0$, т. е. когда $\alpha = 1/4\pi, 3/4\pi$. Если $\sin \delta > 0$, то первому значению соответствует максимум, а второму — минимум; при $\sin \delta < 0$ — наоборот.

535. Решение. Согласно предыдущей задаче интенсивность света, прошедшего через анализатор,

$$I = a^2 (1 + \sin 2\alpha \sin \delta).$$

При постоянном угле α интенсивность будет минимальной, когда

$$\sin \delta = -1, \quad \text{т. е. при } \delta = 3/2\pi, 7/2\pi, \dots,$$

и максимальной, когда

$$\sin \delta = 1, \quad \text{т. е. при } \delta = 1/2\pi, 5/2\pi, 9/2\pi, \dots,$$

если $\sin 2\alpha > 0$. Если же $\sin 2\alpha < 0$, то в первом случае будет мини-мум, а во втором — максимум интенсивности. Следовательно, в поле зрения будут видны чередующиеся светлые и темные полосы. При вращении клина будет меняться угол α и, следовательно, в каждой точке клина будет изменяться интенсивность.

При углах $\alpha = 90, 180$ и 270° весь клин будет освещен равно-мерно, а при углах $\alpha = 45, 135, 225, 315^\circ$ будет наблюдаться наибо-лее резкая разница в интенсивности темных и светлых полос, причем при переходе через углы $\alpha = 90, 180, 270^\circ$ темные полосы будут переходить в светлые, а светлые — в темные.

536. Решение. Разложим мысленно световую волну на две составляющие, электрические векторы которых взаимно перпенди-кулярны и параллельны главным осям пластиинки. При введении

пластинки интерференционные полосы от каждой составляющей смеются. Если введенная пластина является пластинкой в полволны, то разность смещений составит половину ширины полосы. В этом случае при введении пластины интерференционные полосы пропадут. При введении поляроида они появятся вновь. Исключение составляет случай, когда оси поляроида наклонены под углом 45° к осям пластины. В этом случае интерференционные полосы наблюдаются не будут.

537. Решение. В системе главных осей X, Y эллиптическое колебание описывается уравнениями $E_X = a \cos \omega t$, $E_Y = b \sin \omega t$ (рис. 136). Перейдем к новой системе ξ, η , оси которой являются

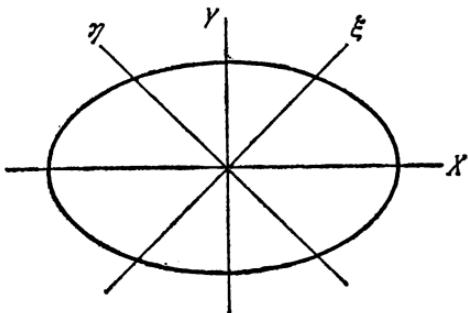


Рис. 136.

биссектрисами прежних координатных углов. В этой системе то же колебание представится в виде

$$E_\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} (a \cos \omega t + b \sin \omega t) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \cos (\omega t - \varphi),$$

$$E_\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} (-a \cos \omega t + b \sin \omega t) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \cos [\omega t - (\pi - \varphi)],$$

где φ — острый угол, определяемый уравнением $\operatorname{tg} \varphi = b/a$. Колебания вдоль осей ξ и η совершаются с одинаковыми амплитудами $\sqrt{(a^2 + b^2)/2}$, причем колебание вдоль оси ξ опережает по фазе колебание вдоль оси η на угол $\delta = \pi - 2\varphi$.

Внесем кристаллическую пластинку так, чтобы ее оси были ориентированы вдоль ξ и η и чтобы она изменила разность фаз до $\pm \pi/2$. Для этого должно быть выполнено соотношение

$$(\omega t - \varphi - k_\xi l) - (\omega t - \pi + \varphi - k_\eta l) = \pm \pi/2,$$

откуда

$$l = \frac{2\varphi - \pi \pm \pi/2}{k_\eta - k_\xi} = \lambda \frac{\varphi/\pi - 1/2 \pm 1/4}{n_\eta - n_\xi}.$$

Тогда волна перейдет в волну, поляризованную по кругу. Знаку плюс соответствует то же направление вращения, что и в исходной эллиптически-поляризованной волне, а знаку минус — противоположное. Такой же результат получится, если толщину пластинки изменить на $m\lambda/(n_o - n_e)$, где m — целое число.

$$538. d = \frac{\lambda^2}{2\delta\lambda} \frac{1}{(n_o - n_e) - \lambda(d n_o/d\lambda - d n_e/d\lambda)} \approx 1,5 \text{ мм.}$$

539. Решение. Как следует из закона преломления (рис. 137),
 $\sin \psi_e / \sin \psi_o = n_o / n_e$.

В призме николя сечение BC перпендикулярно к ее основаниям AB и CD , а по условию задачи волновая нормаль необыкновенной волны

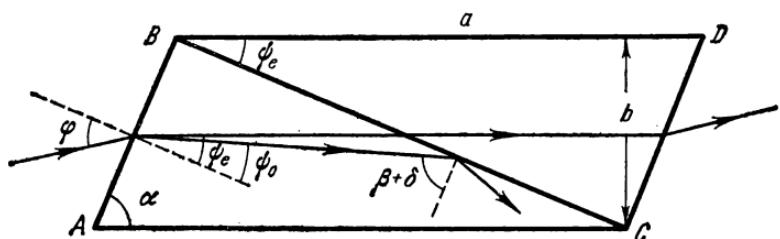


Рис. 137.

должна быть параллельна длинному ребру призмы. Поэтому

$$\alpha = \pi/2 - \psi_e.$$

Далее, по условию задачи

$$\psi_o = \pi/2 - (\beta + \delta),$$

где β — предельный угол полного внутреннего отражения на границе BC для обыкновенного луча. Он определяется уравнением $\sin \beta = n/n_o$. Подставляя численные значения n , n_o и n_e , находим

$$\beta = 68^\circ 15', \quad \psi_o = 20^\circ, \quad \psi_e = 22^\circ, \quad \alpha = 68^\circ.$$

Наконец,

$$a/b = 2/\sin 2\alpha = 2,88.$$

540. Для канадского бальзама $a/b = 4,93$, апертура $2\varphi = 34^\circ 20'$. Для льняного масла $a/b = 4,14$, апертура $2\varphi = 40^\circ 50'$.

Решение. Поскольку в рассматриваемом случае электрический вектор направлен либо перпендикулярно к оптической оси (обыкновенная волна), либо параллельно ей (необыкновенная волна), направления волновых нормалей и световых лучей совпадают. Необыкновенный луч, падающий на плоскость разреза BC (рис. 138), всегда проходит через нее и притом без отклонения. В частности, через призму могут проходить необыкновенные лучи, направленные по ее

диагонали. Таким лучам соответствует максимально возможный угол падения φ , при котором имеется необыкновенный луч, проходящий через призму. Если угол падения превышает φ , то нет ни одного необыкновенного луча, который мог бы пройти через призму: в этом случае необыкновенный луч попадает на боковую поверхность призмы

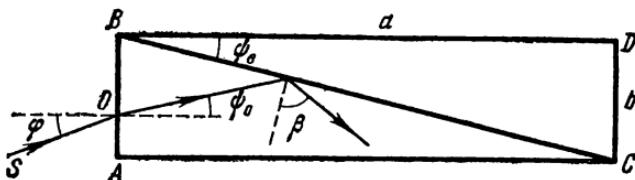


Рис. 138.

и поглощается на ней. Углу φ соответствует угол преломления необыкновенного луча ψ_e , определяемый соотношением

$$\operatorname{tg} \psi_e = b/a.$$

Подберем отношение a/b таким образом, чтобы при углах падения, не превышающих предельного угла φ , ни один обыкновенный луч не мог пройти через разрез BC , а испытывал бы на нем полное внутреннее отражение. Для этого достаточно, чтобы обыкновенный луч SO , падающий на AB внизу под углом φ , встречал плоскость разреза BC под предельным углом полного внутреннего отражения β : $\sin \beta = n/n_o$. Как видно из рис. 138,

$$\beta = \pi/2 - (\psi_e + \psi_o),$$

и следовательно, должно быть

$$\cos(\psi_e + \psi_o) = n/n_o.$$

Добавив сюда закон преломления:

$$\sin \varphi = n_o \sin \psi_o = n_e \sin \psi_e,$$

получим полную систему уравнений для нахождения искомых величин: отношения a/b и апертуры 2φ . Из нее находим удобные расчетные формулы:

$$(n_o^2 - n^2) \left(\frac{a^2}{b^2} \right)^2 + [n_o^2 - n_c^2 - 2n(n + n_e)] \frac{a^2}{b^2} - (n + n_e)^2 = 0,$$

$$\sin \varphi = \frac{n_e}{\sqrt{1 + (a/b)^2}}.$$

541. Решение. Для того чтобы обыкновенный луч, падающий на грань AB снизу под углом φ (рис. 139), испытал полное внутреннее отражение от плоскости разреза BC , необходимо, чтобы угол падения на эту плоскость превосходил предельный угол полного внутреннего отражения:

$$\alpha - \psi_o \geq \beta_o, \quad \sin \beta_o = 1/n_o. \quad (541.1)$$

Обыкновенный луч, падающий на AB сверху, тем более испытает полное внутреннее отражение.

Для того чтобы необыкновенный луч, падающий на грань AB сверху под углом φ' , прошел через плоскость разреза BC , необходимо, чтобы он падал на BC под углом, не превосходящим предельного угла полного внутреннего отражения:

$$\alpha + \psi_e' \leq \beta_e, \quad \sin \beta_e = 1/n_e. \quad (541.2)$$

Тогда необыкновенный луч, падающий на AB снизу, пройдет через BC . Наибольшей апертуре призмы соответствуют в (541.1) и (541.2)

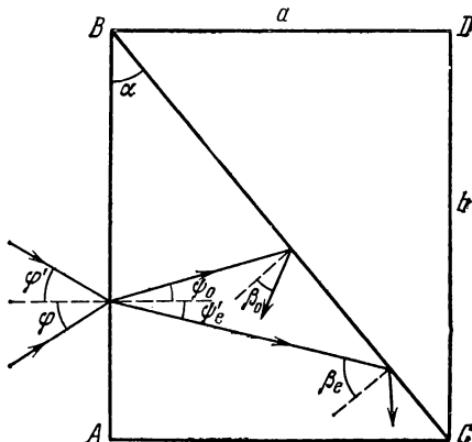


Рис. 139.

знаки равенства. В этом случае угол $\varphi + \varphi'$ равен апертуре призмы. Потребовав дополнительно $\varphi = \varphi'$, будем иметь

$$\alpha - \psi_o = \beta_o, \quad \alpha + \psi_e = \beta_e, \quad (541.3)$$

причем

$$\sin \varphi = n_o \sin \psi_o = n_e \sin \psi_e, \quad (541.4)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = a/b. \quad (541.5)$$

Отсюда могут быть найдены все интересующие нас величины. Из (541.3) получаем

$$\psi_o + \psi_e = \beta_e - \beta_o = 5^\circ 12'. \quad (541.6)$$

Таким образом, углы ψ_o , ψ_e , φ малы, и их синусы можно заменить самими углами. Это дает для апертуры

$$2\varphi = \frac{2n_o n_e}{n_o + n_e} (\beta_e - \beta_o) = 8^\circ 10'. \quad (541.7)$$

и для отношения сторон

$$a/b = \operatorname{tg} (\beta_o + \psi_o) = \operatorname{tg} (\beta_o + \varphi/n_o) = 0,826. \quad (541.8)$$

Таким образом, из всех поляризационных призм рассматриваемая призма является наиболее короткой. Практически эту призму распиливают не по диагонали, а как указано на рис. 140, чтобы легче монтировать ее и предохранить поверхность распила от запыления. Но все же и на практике отношение длины к ширине остается меньше единицы.

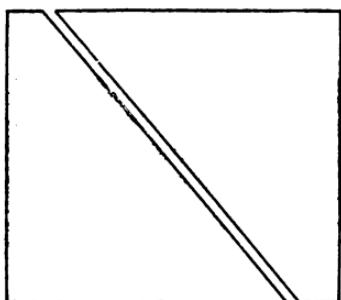


Рис. 140.

542. Решение. Исключая \mathbf{H} из формулы (473.3), получим

$$v^2 \mathbf{D} - c^2 \mathbf{E} = -c^2 (\mathbf{N} \mathbf{E}) \mathbf{N}, \quad (542.1)$$

откуда

$$v^2 - c^2 = \frac{(\mathbf{D} \mathbf{E})}{\mathbf{D}^2}, \quad (542.2)$$

543. Решение. Первые два утверждения непосредственно вытекают из формулы (542.2), а также из связи между векторами \mathbf{D} и \mathbf{E} :

$$D_\alpha = \sum_{\beta} \epsilon_{\alpha\beta} E_\beta \quad (\alpha, \beta = x, y, z).$$

Векторы \mathbf{E} и \mathbf{D} определят плоскость, к которой перпендикулярен вектор \mathbf{H} . После этого определится вектор \mathbf{N} как перпендикулярный к плоскости (\mathbf{D} , \mathbf{H}) или к плоскости (\mathbf{E} , \mathbf{H}).

544. $a_\alpha = c / \sqrt{\epsilon_\alpha}$ ($\alpha = x, y, z$), где a_α — нормальная скорость волны, когда электрический вектор направлен вдоль диэлектрической оси α . Три величины a_α называются главными скоростями света в кристалле.

545. Решение. Выражая в левой части (542.1) вектор \mathbf{E} через \mathbf{D} , получим

$$D_\alpha = -\frac{c^2}{v^2 - a_\alpha^2} (\mathbf{N} \mathbf{E}) N_\alpha \quad (\alpha = x, y, z). \quad (545.1)$$

Умножая обе части этого равенства на N_α , суммируя по α и замечая, что $(\mathbf{N} \mathbf{D}) = 0$, найдем

$$\sum_{\alpha} \frac{N_\alpha^2}{v^2 - a_\alpha^2} = 0, \quad (545.2)$$

или более подробно

$$\frac{N_x^2}{v^2 - a_x^2} + \frac{N_y^2}{v^2 - a_y^2} + \frac{N_z^2}{v^2 - a_z^2} = 0. \quad (545.3)$$

Эта формула называется законом Френеля для нормальных скоростей света в кристалле. Чтобы не исследовать особо случаи, когда один или несколько знаменателей обращаются в нуль, закон

Френеля лучше писать в виде

$$(v^2 - a_y^2)(v^2 - a_z^2)N_x^2 + (v^2 - a_z^2)(v^2 - a_x^2)N_y^2 + (v^2 - a_x^2)(v^2 - a_y^2)N_z^2 = 0. \quad (545.4)$$

546. Решение. Запишем закон Френеля (545.4) в виде

$$F(v^2) = (v^2 - a_y^2)(v^2 - a_z^2)N_x^2 + (v^2 - a_z^2)(v^2 - a_x^2)N_y^2 + (v^2 - a_x^2)(v^2 - a_y^2)N_z^2 = 0. \quad (546.1)$$

Это квадратное относительно v^2 уравнение имеет два вещественных положительных корня. Для доказательства выберем координатные оси так, чтобы

$$a_x \geq a_y \geq a_z. \quad (546.2)$$

Тогда

$$F(a_x^2) = (a_x^2 - a_y^2)(a_x^2 - a_z^2) \geq 0,$$

$$F(a_y^2) = (a_y^2 - a_z^2)(a_y^2 - a_x^2) \leq 0,$$

$$F(a_z^2) = (a_z^2 - a_x^2)(a_z^2 - a_y^2) \geq 0.$$

Отсюда видно, что (546.1) имеет два вещественных положительных корня, один из которых v'^2 лежит между a_x^2 и a_y^2 , а другой v''^2 — между a_y^2 и a_z^2 . Этим корням соответствуют две волны, распространяющиеся с нормальными скоростями v' и v'' :

$$a_x \geq v' \geq a_y \geq v'' \geq a_z. \quad (546.3)$$

Линейная поляризация каждой из волн следует из соотношений:

$$\begin{aligned} D'_x : D'_y : D'_z &= \frac{N_x}{v'^2 - a_x^2} : \frac{N_y}{v'^2 - a_y^2} : \frac{N_z}{v'^2 - a_z^2}, \\ D''_x : D''_y : D''_z &= \frac{N_x}{v''^2 - a_x^2} : \frac{N_y}{v''^2 - a_y^2} : \frac{N_z}{v''^2 - a_z^2}, \end{aligned} \quad (546.4)$$

которые получаются из (545.1). Штрихами обозначены величины, относящиеся к одной волне, а двумя штрихами — к другой волне. Формулы (546.4) показывают, что для обеих волн отношения $D_x : D_y : D_z$ вещественны. Физически это означает отсутствие сдвига фаз между колебаниями D_x , D_y , D_z , откуда и следует линейная поляризация обеих волн. Умножая теперь скалярно первое из уравнений

$$v'^2 D' - c^2 E' = -c^2 (NE') N, \quad v''^2 D'' - c^2 E'' = -c^2 (NE'') N$$

на D'' , а второе на D' , вычитая из одного уравнения другое и замечая, что $(E'D'') = (E''D')$, $(D'N) = (D''N) = 0$, получим

$$(v'^2 - v''^2) (D'D'') = 0. \quad (546.5)$$

Отсюда при $v' \neq v''$ получаем $(D'D'') = 0$, что и требовалось доказать.

547. Решение. Из формулы (546.3) следует, что равенство $v' = v''$ возможно только при условии $v' = v'' = a_y$. Подставляя

в (546.1) той же задачи $v = a_y$, находим

$$(a_y^2 - a_z^2)(a_y^2 - a_x^2) N_y^2 = 0.$$

Если все три главные скорости различны, то отсюда следует $N_y = 0$, т. е. оптические оси, если они существуют, лежат в координатной плоскости ZX . Угол β между оптической осью и осью Z найдется из формулы (545.3), если в ней положить $v = a_y$, $N_y = 0$. Это дает

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{N_x}{N_z} = \pm \sqrt{\frac{a_x^2 - a_y^2}{a_y^2 - a_z^2}} = \pm \frac{n_z}{n_x} \sqrt{\frac{n_x^2 - n_y^2}{n_y^2 - n_z^2}}, \quad (547.1)$$

где n_x , n_y , n_z — главные показатели преломления кристалла. Таким образом, оптические оси первого рода лежат в координатной плоскости ZX и симметрично расположены относительно оси Z .

548. 1) Сптическая ось совпадает с осью Z (положительный кристалл)

$$v' = a_x, \quad v''^2 = a_x^2 \cos^2 \alpha + a_z^2 \sin^2 \alpha,$$

где α — угол между оптической осью (осью Z) и нормалью к фронту волны.

2) Оптическая ось совпадает с осью X (отрицательный кристалл)

$$v'' = a_z, \quad v'^2 = a_x^2 \sin^2 \alpha + a_z^2 \cos^2 \alpha,$$

где α — угол между оптической осью (осью X) и нормалью к фронту волны.

550. Решение. Все формулы кристаллооптики, в которых речь идет о распространении волн вдоль волновых нормалей, получаются из формул

$$\mathbf{D} = -\frac{c}{v} [\mathbf{NH}], \quad \mathbf{H} = \frac{c}{v} [\mathbf{NE}], \quad D_\alpha = \epsilon_\alpha E_\alpha.$$

Путем векторного умножения первых двух уравнений на s этой системе легко придать вид

$$\mathbf{E} = -\frac{u}{c} [\mathbf{sH}], \quad \mathbf{H} = \frac{u}{c} [\mathbf{sD}], \quad E_\alpha = \frac{1}{\epsilon_\alpha} D_\alpha,$$

откуда и следует доказываемая теорема.

551. Результат легко получить с помощью теоремы обращения.

552. Оптические оси первого рода лежат в плоскости ZX симметрично относительно оси Z , образуя с ней угол γ , определяемый формулой

$$\operatorname{tg} \gamma = \pm \frac{a_z}{a_x} \sqrt{\frac{a_x^2 - a_y^2}{a_y^2 - a_z^2}} = \pm \sqrt{\frac{n_x^2 - n_y^2}{n_y^2 - n_z^2}} = \frac{a_z}{a_x} \operatorname{tg} \beta.$$

Отсюда следует, что оптические оси первого рода расположены ближе к оси Z , чем оптические оси второго рода.

553. Кристалл положителен, если $n_z - n_y > n_y - n_x$, и отрицателен, если $n_z - n_y < n_y - n_x$.

554. Кристалл положителен.

556. 1) Оптическая ось направлена вдоль оси Z (положительный кристалл):

$$u' = a_x, \quad \frac{1}{u'^2} = \frac{1}{a_x^2} \cos^2 \alpha + \frac{1}{a_z^2} \sin^2 \alpha,$$

где α — угол между оптической осью (осью Z) и направлением луча.

2) Оптическая ось направлена вдоль оси X (отрицательный кристалл):

$$u'' = a_z, \quad \frac{1}{u''^2} = \frac{1}{a_x^2} \sin^2 \alpha + \frac{1}{a_z^2} \cos^2 \alpha.$$

558. Решение. Компоненты вектора индукции D в кристалле связаны с компонентами вектора напряженности электрического поля E соотношениями:

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z, \\ D_y &= \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z, \\ D_z &= \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z. \end{aligned} \quad (558.1)$$

Кристаллы три-, тетра- и гексагональной систем имеют ось симметрии соответственно третьего, четвертого и шестого порядков.

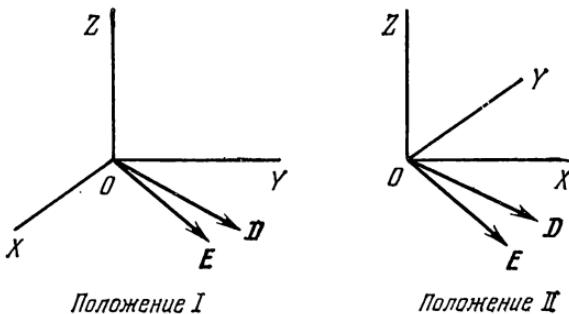


Рис. 141.

Примем эту ось за ось Z прямоугольной системы координат, а оси X и Y выберем произвольно. Ради определенности рассмотрим кристалл тетрагональной системы. Координатную систему неподвижно связем с кристаллом. Сохраняя неизменным направление электрического поля в пространстве, повернем кристалл вокруг оси Z на 90° (рис. 141, положения I и II).

Компоненты векторов D и E относительно повернутой системы координат будем обозначать штрихами. Так как свойства кристалла в произвольном направлении не изменяются при повороте этого направления в кристалле на 90° вокруг оси Z , то в повернутой системе

координат справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} D'_x &= \epsilon_{xx}E'_x + \epsilon_{xy}E'_y + \epsilon_{xz}E'_z, \\ D'_y &= \epsilon_{yx}E'_x + \epsilon_{yy}E'_y + \epsilon_{yz}E'_z, \\ D'_z &= \epsilon_{zx}E'_x + \epsilon_{zy}E'_y + \epsilon_{zz}E'_z. \end{aligned} \quad (558.2)$$

Но компоненты векторов E и D в первоначальной и повернутой системах координат связаны соотношениями (см. рис. 141, положения I и II):

$$\begin{aligned} E'_x &= E_y, & E'_y &= -E_x, & E'_z &= E_z, \\ D'_x &= D_y, & D'_y &= -D_x, & D'_z &= D_z. \end{aligned}$$

На основании этого уравнения (558.2) переходят в следующие:

$$\begin{aligned} D_y &= \epsilon_{xx}E_y - \epsilon_{xy}E_x + \epsilon_{xz}E_z, \\ -D_x &= \epsilon_{yx}E_y - \epsilon_{yy}E_x + \epsilon_{yz}E_z, \\ D_z &= \epsilon_{zx}E_y - \epsilon_{zy}E_x + \epsilon_{zz}E_z. \end{aligned}$$

Эти уравнения, равно как и уравнения (558.1), справедливы, каков бы ни был вектор E , что возможно лишь при выполнении соотношений: $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy}$, $\epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx}$, $\epsilon_{xz} = -\epsilon_{yz}$, $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz}$. Из этих соотношений и из симметрии тензора ϵ следует, что недиагональные элементы этого тензора обращаются в нуль.

Далее, так как $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy}$, то для любого вектора E , перпендикулярного к оси Z , имеем $D = \epsilon_{xx}E$. При таком направлении E кристалл ведет себя как изотропная среда. Все направления, перпендикулярные к оси Z в оптическом отношении, характеризуются одинаковыми свойствами. Отсюда следует, что кристалл односный, причем его оптическая ось направлена параллельно оси Z .

Таким же методом могут быть разобраны кристаллы три- и гексагональной систем.

560. См. рис. 142 (o —обыкновенный луч, e —необыкновенный).

561. Кристалл положителен, ось наибольшей диэлектрической проницаемости перпендикулярна к пластинке.

562. Перпендикулярно к любой из диэлектрических осей кристалла.

563. Вследствие того, что в кварце происходит вращение плоскости поляризации. Угол поворота плоскости поляризации для пластиинки кварца толщиной в 1 мм меньше 180° для видимого света любой окраски.

564. Если пластинку, вырезанную перпендикулярно к оптической оси из кварца, т. е. вещества, вращающего плоскость поляризации, поместить между двумя скрещенными николями, то такая система будет пропускать свет (см. решение предыдущей задачи), и картина не будет меняться при вращении пластиинки вокруг направления распространения света. Если пластиинка вырезана параллельно оси,

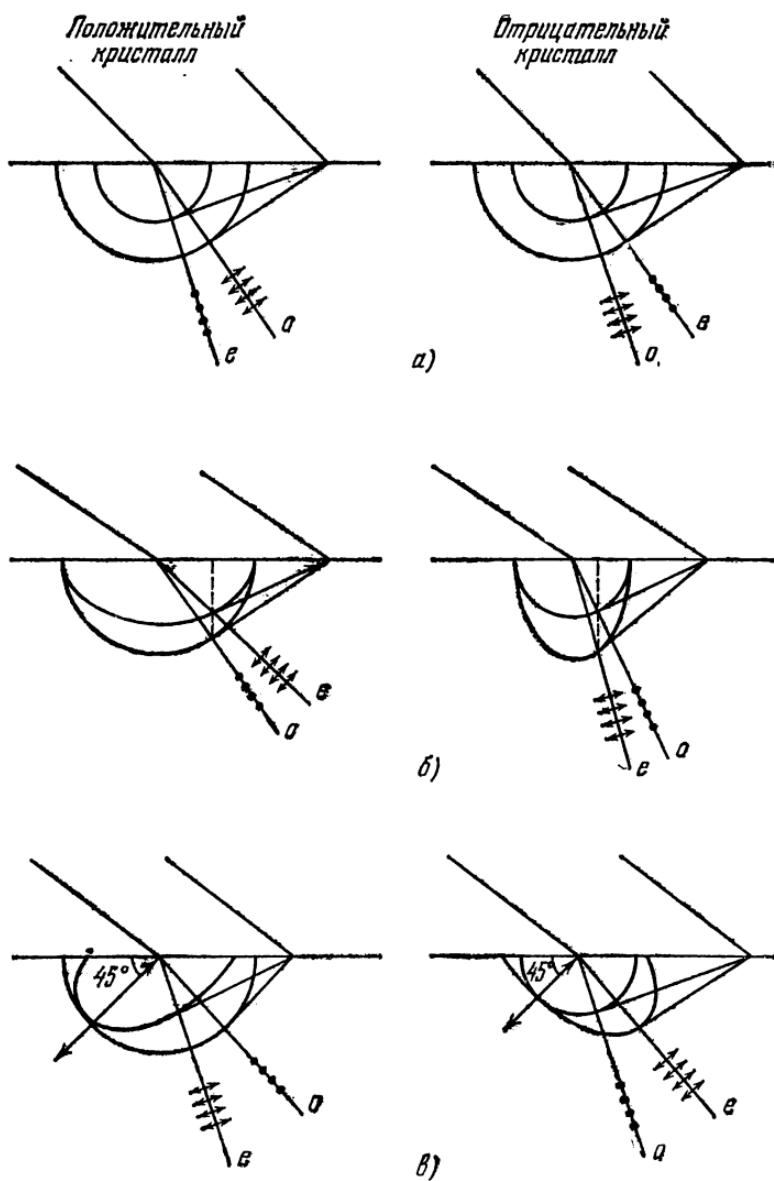


Рис. 142.

то явление значительно усложняется. Линейно-поляризованные волны, вступая в пластинку, распадаются на две линейно-поляризованные волны, распространяющиеся с разными скоростями. Разность фаз между ними будет поэтому изменяться, и свет из линейно-поляризованного превратится в эллиптически-поляризованный. Система также будет пропускать свет, но интенсивность его будет меняться при вращении пластиинки вокруг направления распространения света.

565. Вследствие дисперсии вращательной способности кварца.

566. Из-за отличия направления вращения плоскости поляризации (лево- и правовращающий кварц).

567. 1) Если поместить пластинку кварца, вырезанную перпендикулярно к оптической оси, между скрещенными николями и осветить систему монохроматическим светом, то она будет пропускать свет; повернув анализатор на угол, меньший 90° , можно снова погасить свет. Если при этом наблюдатель должен вращать анализатор по направлению часовой стрелки, то кварц будет правовращающий, если же против часовой стрелки, то левовращающий.

2) Если осветить систему белым светом, то пластинка будет казаться глазу окрашенной. Если вращать анализатор по часовой стрелке, то для правовращающего кварца окраска меняется в сторону коротких длин волн видимого спектра. Для левовращающего кварца порядок изменения окраски обратный.

568. $d = 4,5$ мм.

569. 1) 7,5 мм; 2) 3,75 мм.

570. $d = \pi\lambda^3/(8B\delta\lambda) \approx 1900$ мм (в формуле предполагается, что угол вращения плоскости поляризации измеряется в радианах).

571. $\Delta n = \varphi\lambda/(\pi l) \approx 1,1 \cdot 10^{-8}$.

572. $\Delta n = 7,1 \cdot 10^{-5}$.

573. Решение. Прибор помещается между параллельными николями так, что линия соприкосновения правого и левого кварца совпадает с главным сечением поляризатора. Однородное освещение поля зрения будет наблюдаться только в том случае, когда одно из главных направлений в пластинке совпадает с главным сечением поляризатора. При применении монохроматического света можно добиться наиболее выгодного условия для работы прибора, изменения толщину клиньев так, чтобы угол вращения плоскости поляризации для данного света был близок к 90° . В этих условиях прибор наиболее чувствителен к отклонению одного из главных направлений в пластинке от главного сечения поляризатора.

574. Угол Θ между направлением движения частицы и волновым вектором \mathbf{k} (или, что то же, волновой нормалью N) излучения Вавилова—Черенкова определяется уравнением

$$\cos \Theta = v(\omega, N)/V, \quad (574.1)$$

где v — нормальная скорость волны (т. е. скорость распространения фазы в направлении N), зависящая от частоты ω и направления нормали N , а V — скорость частицы в среде. Скорость v в данном направлении N может иметь два значения v_1 и v_2 . В соответствии с этим уравнение (574.1) разбивается на два:

$$\cos \Theta_1 = v_1(\omega, N)/V, \quad \cos \Theta_2 = v_2(\omega, N)/V. \quad (574.2)$$

Излучение Вавилова — Черенкова в кристалле образует, вообще говоря, две сложные конические поверхности, образующие которых (волновые нормали) определяются уравнениями (574.2). Излучение возможно лишь при выполнении одного из условий: $v_1 < V$ или $v_2 < V$. При некоторых значениях V может получиться одна коническая поверхность или ни одной. Наконец, возможен случай, когда получается лишь часть какой-либо из конических поверхностей (574.2) (поскольку v_1 и v_2 зависят от направления N). Конусам нормалей (574.2) соответствуют конусы лучей, которые могут быть найдены по общим формулам кристаллооптики.

§ 8. Скорость света

576. Аберрация света есть изменение направления распространения световой волны при переходе от одной системы отсчета к другой, движущейся относительно первой. Если бы скорость Земли v относительно звезды оставалась неизменной, то движение Земли сказалось бы только на кажущемся положении звезды на небесном своде и аберрация не могла бы наблюдаться. Аберрация света возникает вследствие изменения v , обусловленного вращением Земли вокруг Солнца. Угол aberrации $\Delta\vartheta$ определяется разностью относительных скоростей Земли Δv в диаметрально противоположных точках земной орбиты: $\operatorname{tg} \Delta\vartheta = 1/2 \Delta v/c$. Эта разность относительных скоростей, а с ней и угол $\Delta\vartheta$ одинаковы для всех звезд и не зависят от собственного движения последних.

577. 1) $0,32''$; 2) в 64 раза.

578. $c = 4DZN/(2n - 1) = 2,99 \cdot 10^5$ км/с.

579. $u = (\omega' - \omega)/(k' - k) = d\omega/dk$.

580. $u = v - \lambda dv/d\lambda$, где λ — длина волны в среде (формула Рэлея); $u = v \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right)$.

583. 1) $u = a = v$; 2) $u = \frac{a\sqrt{\lambda}}{2} = \frac{v}{2}$; 3) $u = \frac{3}{2} \frac{a}{\sqrt{\lambda}} = \frac{3}{2} v$;

4) $u = \frac{2a}{\lambda} = 2v$; 5) $u = \frac{c^2}{\sqrt{c^2 + b^2\lambda^2}} = \frac{c^2}{v}$; 6) $u = \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{c^2}{v \left\{ 1 + \frac{\omega}{2\epsilon\mu} \frac{d(\epsilon\mu)}{d\omega} \right\}}$.

584. $e = 1 + A/\omega^2$, где A — постоянная.

586. $u = c^2/v = c \sin \alpha$. См. задачу 592.

587. Решение. Пусть при $t < 0$ в контуре совершаются свободные колебания:

$$I = I_0 e^{i\omega t}, \quad V = V_0 e^{i\omega t},$$

где I — сила тока в контуре, а V — напряжение на обкладках конденсатора, связанные между собой соотношением

$$L \frac{dI}{dt} + V = 0 \text{ или } i\omega L I + V = 0.$$

Если в момент $t = 0$ в контур ввести сопротивление R , то, начиная с этого момента, колебания будут описываться уравнением

$$L(\tilde{\omega}) \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C(\tilde{\omega})} = 0,$$

откуда

$$I = I_0 e^{i\tilde{\omega}t}, \quad t > 0,$$

где $\tilde{\omega}$ — комплексная частота, определяемая уравнением

$$\tilde{\omega} L(\tilde{\omega}) - \frac{1}{\tilde{\omega} C(\tilde{\omega})} = iR.$$

Если R исчезающе мало, то $\tilde{\omega}$ должна отличаться от ω также на исчезающе малую величину. Но ω удовлетворяет уравнению

$$\omega L(\omega) - \frac{1}{\omega C(\omega)} = 0.$$

Вычитая его из предыдущего соотношения и заменяя все разности их дифференциалами, получим

$$\left[\frac{d}{d\omega} (\omega L) + \frac{1}{\omega^2 C^2} \frac{d}{d\omega} (\omega C) \right] (\tilde{\omega} - \omega) = iR,$$

откуда $\tilde{\omega} = \omega + i\delta$, причем

$$\frac{R}{\delta} = \frac{d(\omega L)}{d\omega} + \frac{1}{\omega^2 C^2} \frac{d(\omega C)}{d\omega} = \frac{d(\omega L)}{d\omega} + \frac{L}{C} \frac{d(\omega C)}{d\omega}.$$

При определении джоулева тепла надо проинтегрировать выражение $R I^2$ по времени. Поскольку возвведение в квадрат — нелинейная операция, необходимо перейти к вещественной форме, т. е. сделать замену

$$I \rightarrow \operatorname{Re}(I) = (I + I^*)/2.$$

Энергия, первоначально запасенная в колебательном контуре, будет

равна

$$W = \int_0^\infty R \left(\frac{I + I^*}{2} \right)^2 dt = \frac{R |I_0|^2}{4} \left\{ \frac{\delta}{\omega^2 + \delta^2} + \frac{1}{\delta} \right\}$$

или в пределе при $\delta \rightarrow 0$

$$W = \frac{|I_0|^2}{4} \frac{R}{\delta}.$$

Подставляя сюда значение для R/δ и пользуясь соотношением $\omega L |I_0| = |V_0|$, получим

$$W = \frac{L_0 |I_0|^2}{4} \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} + \frac{C_0 |V_0|^2}{4} \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}.$$

Если бы между обкладками конденсатора и внутри соленоида был вакуум, то для средних по времени значений магнитной и электрической энергий можно было бы написать

$$\frac{L_0 |I_0|^2}{4} = \frac{1}{8\pi} \bar{H}^2 \tau_m, \quad \frac{C_0 |V_0|^2}{4} = \frac{1}{8\pi} \bar{E}^2 \tau_e,$$

где τ_m и τ_e —объемы соленоида и конденсатора, а E и H —напряженности электрического и магнитного полей, когда амплитуды напряжения на конденсаторе и тока в соленоиде равны V_0 и I_0 . Но при заданных V_0 и I_0 поля E и H не зависят от среды, заполняющей конденсатор и соленоид. Поэтому предыдущие соотношения остаются справедливыми и в том случае, когда конденсатор и соленоид заполнены веществом. Используя их, получаем следующие выражения для средних по времени значений плотностей электрической и магнитной энергий:

$$\bar{w}_e = \frac{\bar{W}_e}{\tau_e} = \frac{1}{8\pi} \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \bar{E}^2, \quad \bar{w}_m = \frac{\bar{W}_m}{\tau_m} = \frac{1}{8\pi} \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} \bar{H}^2.$$

588. Для средних плотностей энергий и ее потока нетрудно получить

$$\bar{w} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{dk}{d\omega} (EE^*), \quad \bar{S} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (HH^*),$$

откуда и следует требуемый результат.

589. Групповая.

590. Решение. Плотность электромагнитной энергии

$$\bar{w} = \frac{1}{8\pi} \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} (EE^*) + \frac{1}{8\pi} \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} (HH^*)$$

существенно положительная величина. В плоской волне $\varepsilon(EE^*) = \mu(HH^*)$. Поэтому

$$\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} + \frac{\mu}{8} \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} > 0.$$

Это неравенство должно соблюдаться для любых сред, у которых знаки ϵ и μ совпадают, поскольку оно выведено в предположении, что в среде может распространяться однородная монохроматическая волна, для которой $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu > 0$. В том же предположении имеет смысл говорить о групповой скорости. Преобразовав предыдущее неравенство к виду

$$\mu \frac{\omega}{k} \frac{d\omega}{dk} = \mu v u > 0,$$

легко получить требуемый результат.

591. Решение. Записав закон Френеля

$$\sum_{\alpha} \frac{N_{\alpha}^2}{v^2 - a_{\alpha}^2} = 0$$

для нормальной скорости волн в виде

$$\sum_{\alpha} \frac{k_{\alpha}^2}{\omega^2 - k^2 a_{\alpha}^2} = 0$$

и дифференцируя по k_i , нетрудно получить

$$v \frac{\partial \omega}{\partial k_i} \sum_{\alpha} \frac{N_{\alpha}^2}{(v^2 - a_{\alpha}^2)^2} = N_i \left\{ \frac{1}{v^2 - a_i^2} + \sum_{\alpha} \frac{N_{\alpha}^2 a_{\alpha}^2}{(v^2 - a_{\alpha}^2)^2} \right\}.$$

Из формулы (545.1) находим

$$\sum_{\alpha} \frac{N_{\alpha}^2}{(v^2 - a_{\alpha}^2)^2} = \frac{1}{c^4} \frac{D^2}{(4\pi E)^2}, \quad \frac{1}{v^2 - a_i^2} = - \frac{D_i}{c^2 (NE) N_i},$$

$$\sum_{\alpha} \frac{N_{\alpha}^2 a_{\alpha}^2}{(v^2 - a_{\alpha}^2)^2} = \frac{1}{c^4} \cdot \frac{\sum (a_{\alpha} D_{\alpha})^2}{(NE)^2} = \frac{1}{c^2} \frac{ED}{(NE)^2}.$$

Подстановка этих значений в предыдущее соотношение дает

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} e_x + \frac{\partial \omega}{\partial k_y} e_y + \frac{\partial \omega}{\partial k_z} e_z = \frac{c^2}{v D^2} [E (ND)].$$

Из формулы (473.3)

$$[ND] = - \frac{c}{v} [N(NH)] = \frac{c}{v} H.$$

Поэтому

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c^3}{v^2 D^2} [EH].$$

Согласно формуле (542.2) $v^2 D^2 = c^2 (ED) = c^2 H^2$, так что

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c}{H^2} [EH] = \frac{cE}{H} s.$$

Наконец, применяя к (542.2) теорему обращения, получим

$$u^2 = c^2 \frac{E^2}{(DE)} = c^2 \frac{E^2}{H^2}.$$

Окончательно

$$\partial\omega/\partial k = us,$$

что и требовалось доказать.

593. Можно. Противоречия нет, ибо «зайчик», движущийся со скоростью v вдоль экрана, не является сигналом. Разных частей экрана достигают фотоны, испущенные в разные моменты, и поэтому сигнал здесь распространяется не вдоль экрана.

594. В момент $t = t_0 + R/c$, где R — кратчайшее расстояние от точки наблюдения до экрана, осветится соответствующая ближайшая точка экрана. Затем освещенное пятно будет увеличиваться.

595. Будем характеризовать точки «видимой» поверхности расстоянием r от точки O и углом θ между вектором r и линией OP (рис. 143). Время испускания света t'_1 , отвечающее точке (r, θ) , и соответствующее время наблюдения t связаны соотношением

$$t'_1 = t - R'/c \approx t - R/c + \frac{r}{c} \cos \theta;$$

с другой стороны,

$$t'_1 - t_1 = t'_1 - t_0 + R/c = r/v,$$

поскольку путь r пройден со скоростью v . Отсюда

$$r = \frac{v(t - t_0)}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}.$$

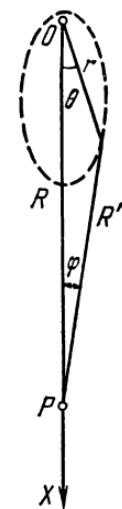


Рис. 143.

596. Скорость $u = dr/dt = \frac{v}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}$ максимальна при $\theta = 0$

и равна $u_{\max} = \frac{v}{1 - v/c}$. Скорость, перпендикулярная к лучу зрения $u_{\perp} = \frac{dr}{dt} \sin \theta = \frac{v \sin \theta}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}$, максимальна, когда $du_{\perp}/d\theta = 0$,

и равна $u_{\perp \max} = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ при угле $\theta = \theta_{\max} = \arccos(v/c)$.

597. «Видимая» скорость оболочки, как и скорость «зайчика» (см. задачу 593), не являются скоростью какого-либо материального тела или сигнала.

598. Источник будет казаться движущимся в направлении, противоположном направлению его фактического движения.

599. Решение. Возьмем сначала за систему отсчета среду. Пусть в ней распространяется плоская акустическая волна

$$\psi = a \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad \mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{N},$$

где \mathbf{N} — нормаль к фронту волны. Найдем частоту волны в системе, относительно которой источник неподвижен. Подставляя в предыдущее выражение радиус-вектор источника $\mathbf{r} = \mathbf{v}_{\text{ист}} t + \text{const}$, находим для фазы: $(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{\text{ист}}) t + \text{const}$. Отсюда

$$\omega_{\text{ист}} = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{\text{ист}}.$$

Аналогично, для частоты, воспринимаемой наблюдателем,

$$\omega_{\text{набл}} = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{\text{набл}}.$$

Исключая ω и переходя от циклических к обычным частотам, получим

$$\begin{aligned} \frac{v_{\text{набл}}}{v_{\text{ист}}} &= \frac{1 - \frac{1}{c} (N v_{\text{набл}})}{1 - \frac{1}{c} (N v_{\text{ист}})} = \frac{1 - \frac{v_{\text{набл}}}{c} \cos \Theta_{\text{набл}}}{1 - \frac{v_{\text{ист}}}{c} \cos \Theta_{\text{ист}}} = \\ &= \frac{1 + \frac{v_{\text{набл}}}{c} \cos \vartheta_{\text{набл}}}{1 + \frac{v_{\text{ист}}}{c} \cos \vartheta_{\text{ист}}}, \end{aligned}$$

где $\Theta_{\text{набл}}$ и $\Theta_{\text{ист}}$ — углы между направлением распространения волны и направлениями скоростей наблюдателя и источника; $\vartheta_{\text{набл}} = \pi - \Theta_{\text{набл}}$, $\vartheta_{\text{ист}} = \pi - \Theta_{\text{ист}}$ — дополнительные к ним углы, т. е. углы между теми же скоростями и линией наблюдатель — источник. При больших скоростях источника или наблюдателя отношение $v_{\text{набл}}/v_{\text{ист}}$ может получиться отрицательным; тогда в предыдущей формуле следует переменить знак.

600. $\frac{v_{\text{набл}}}{v_{\text{ист}}} = \frac{c + v_{\text{набл}}}{c + v_{\text{ист}}}$, где скорости $v_{\text{набл}}$ и $v_{\text{ист}}$ считаются положительными, если они направлены от наблюдателя к источнику.

601. $\frac{v_{\text{набл}}}{v_{\text{ист}}} = 1 + \frac{1}{c} (N v_{\text{отн}}) = 1 - \frac{v_{\text{отн}}}{c} \cos \vartheta$, где ϑ — угол между скоростью источника и линией наблюдения в системе отсчета, в которой наблюдатель поконится. Волновая нормаль \mathbf{N} проведена в той же системе.

602. Решение. Пусть плоскость зеркала перпендикулярна к оси X , а само зеркало движется вдоль этой оси со скоростью v . Тогда при надлежащем выборе начала отсчета времени абсцисса зер-

кала будет $x_3 = vt$. Представим падающую и отраженную волны в виде

$$a \exp \left\{ i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\}, \quad a' \exp \left\{ i\omega' \left(t + \frac{x}{c} \right) \right\}.$$

В силу граничных условий поля падающей, отраженной и прошедшей волн на поверхности зеркала связаны между собой однородной линейной зависимостью с коэффициентами, не зависящими от времени.

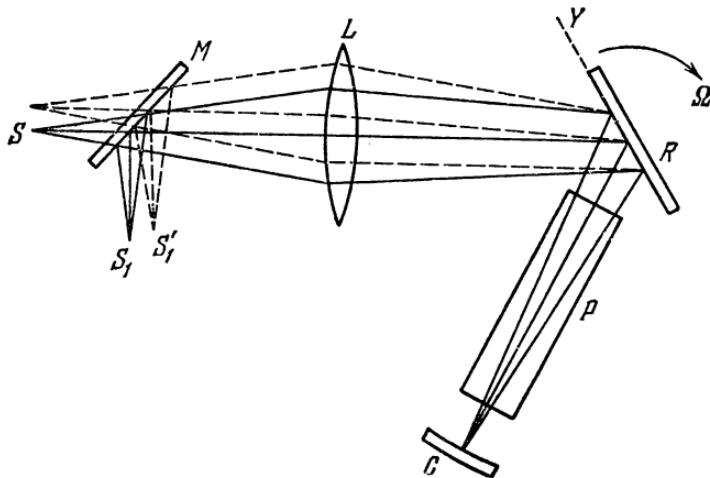


Рис. 144.

Это может быть тогда и только тогда, когда фазы этих волн на поверхности зеркала в любой момент времени равны между собой:

$$\omega t - \frac{\omega}{c} x_3 = \omega' t + \frac{\omega'}{c} x_3, \text{ откуда}$$

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\nu'}{\nu} = \frac{1 - v/c}{1 + v/c} = 1 - 2 \frac{v}{c}.$$

603. $\nu' = \nu (1 \mp 2Nv/c)$. Знак минус соответствует отражению от удаляющегося зеркала, знак плюс — от приближающегося зеркала.

604. Решение. Лучи от источника S (рис. 144), пройдя через стеклянную пластинку M и линзу L , отражаются от плоского зеркала R , которое может вращаться вокруг оси, перпендикулярной к плоскости чертежа. Линза L дает изображение источника S на поверхности вогнутого зеркала C , центр кривизны которого совпадает с осью вращения зеркала R . Сосуд P наполняют исследуемым веществом, в котором измеряется скорость света. Если зеркало R неподвижно, то лучи, отраженные от C и R , снова сойдутся в точке S . Зеркало M отклонит часть лучей в сторону и даст действительное

изображение источника в S_1 . При вращении зеркала R изображение S_1 смещается в S'_1 . По величине смещения $S_1S'_1$ можно вычислить скорость света в исследуемом веществе. Так как цель задачи — ответить на принципиальный вопрос, какую скорость света дает метод Фуко, то воздушные зазоры между R и P , а также между P и C можно считать бесконечно тонкими и во всех расчетах пренебречь толщиной этих зазоров.

Обычный расчет проводится следующим способом. На прохождение расстояния от R до C и обратно волновой фронт, распространяющийся с фазовой скоростью, затрачивает время $T = 2D/v$, где D — расстояние между зеркалами R и C . За это время R повернется на угол $\varphi = T\Omega$, если Ω — угловая скорость вращения зеркала. Луч, отраженный от зеркала R , вращается с вдвое большей скоростью. За то же время он повернется на угол $\alpha = 2\varphi = 2T\Omega = (4D/v)\Omega$. Угол α легко рассчитать по величине смещения $S_1S'_1$. Таким образом,

$$v = 4D\Omega/\alpha. \quad (604.1)$$

В этом рассуждении не принято во внимание изменение частоты, которое согласно принципу Доплера должно происходить при отражении света от вращающегося зеркала R . Поэтому оно не дает ответа, что за скорость вычисляется по формуле (604.1).

Поместим начало координат на оси вращающегося зеркала R и направим ось Y по линии пересечения плоскости этого зеркала с плоскостью чертежа. Так как линейные скорости различных точек вращающегося зеркала различны, то и изменение частоты волны при ее отражении от зеркала будет разным в зависимости от того, в каком месте зеркала произошло отражение. Благодаря этому различные точки волнового фронта будут распространяться в среде с различными фазовыми скоростями. Это поведет к вращению волнового фронта в среде. Если за направление положительного вращения принять направление вращения зеркала R , то для угловой скорости вращения волнового фронта в среде можно написать

$$\Omega' = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dv}{dy} = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dv}{d\omega} \frac{d\omega}{dy},$$

где φ — угол падения светового луча на зеркало R . Так как $v = \omega/k$, то

$$\frac{dv}{d\omega} = \frac{1}{k} - \frac{\omega}{k^2} \frac{dk}{d\omega} = \frac{v}{\omega} - \frac{v^2}{\omega u},$$

где u — групповая скорость. Остается определить $d\omega/dy$. Если ω — частота волны, отраженной от зеркала в точке с координатой y , а

$\omega + d\omega$ — с координатой $y + dy$, то по принципу Доплера $\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{2}{c} \Omega \cos \varphi dy$, откуда

$$\frac{1}{\cos \varphi} \frac{d\omega}{dy} = -2\Omega \frac{\omega}{c} = -2\Omega \frac{\omega}{nv},$$

где n — показатель преломления. Таким образом,

$$\Omega' = \left(\frac{v^2}{\omega u} - \frac{v}{u} \right) 2\Omega \frac{\omega}{nv} = \frac{2\Omega}{n} \left(\frac{v}{u} - 1 \right).$$

Отраженный от зеркала C волновой фронт будет также поворачиваться при распространении в веществе с угловой скоростью Ω' и притом, как легко сообразить, в том же направлении, что и падающий волновой фронт. С другой стороны, на прохождение слоя вещества толщиной $2D$ волновой фронт затрачивает время $T = 2D/v$. За это время он повернется в среде на угол $\Omega' T = \frac{4D\Omega}{nv} \left(\frac{v}{u} - 1 \right)$. По выходе из сосуда P в вакуум волновой фронт преломляется, вследствие чего угол поворота увеличивается в n раз и становится равным

$$n\Omega' T = \frac{4D\Omega}{v} \left(\frac{v}{u} - 1 \right) = \frac{4D\Omega}{u} - \frac{4D\Omega}{v}.$$

Этот поворот надо прибавить к повороту $4D\Omega/v$, найденному ранее без учета эффекта Доплера. Таким образом, измеряемый угол поворота α в действительности равен

$$\alpha = \frac{4D\Omega}{v} + \left(\frac{4D\Omega}{u} - \frac{4D\Omega}{v} \right) = \frac{4D\Omega}{u},$$

так что вместо формулы (604.1) получаем

$$u = 4D\Omega/\alpha. \quad (604.2)$$

Следовательно, метод вращающегося зеркала Фуко дает групповую скорость.

605. Метод вращающегося зеркала дает групповую скорость $u = v \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right)$. Так как $n = c/v$, то

$$\frac{c}{u} = \frac{n}{1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}} = 1,76.$$

Майкельсон на опыте нашел $c/u = 1,75$.

606. Решение. Пусть в эфире распространяется световая волна под углом α к оси Z . Плоскость, проходящую через волновую нормаль и ось Z , примем за координатную плоскость XZ . Если координатная система поконится относительно эфира, то волновое движение можно записать в виде

$$E = E_0 \cos [\omega t - k(x \sin \alpha + z \cos \alpha)],$$

причем скорость света $c = \omega/k$ не зависит от направления его распространения. Запишем ту же волну в координатной системе, движущейся относительно эфира в направлении оси Z со скоростью v .

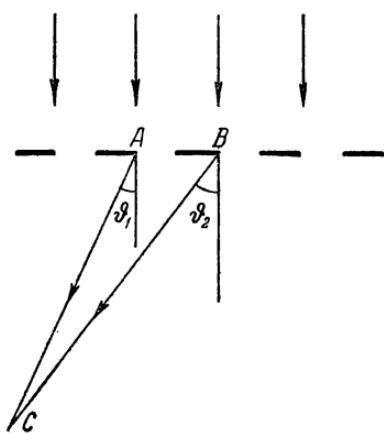


Рис. 145.

Если в начальный момент времени обе системы совпали, то координаты в новой системе выразятся через координаты в старой системе формулами

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z - vt.$$

Значит, волновое движение относительно новой системы представится в виде

$$E = E_0 \cos [\omega' t - k(x' \sin \alpha + z' \cos \alpha)],$$

где $\omega' = \omega - kv \cos \alpha$.

Таким образом, частота волны при наблюдении в новой системе изменяется. Напротив, длина волны $\lambda = 2\pi/k$ останется без изменения.

Фазовая скорость света c' в движущейся системе также изменяется. Она, очевидно, равна

$$c' = \omega'/k = c - v \cos \alpha. \quad (606.1)$$

От фазовой скорости надо отличать скорость светового сигнала. Она, очевидно, найдется по классической теореме сложения скоростей. Компоненты скорости светового сигнала в неподвижной системе равны $c \sin \alpha$ и $c \cos \alpha$. В движущейся системе x -компонент остается без изменения, а z -компонента уменьшится на v . Итак, компоненты скорости u светового сигнала относительно движущейся системы координат будут равны $u_x = c_x = c \sin \alpha$, $u_z = c_z - v = c \cos \alpha - v$. Отсюда видно, что световой сигнал распространяется в движущейся системе под другим углом к оси Z , чем в неподвижной системе (аберрация света!). Для самой скорости светового сигнала u получаем

$$u^2 = u_x^2 + u_z^2 = c^2 - 2cv \cos \alpha + v^2.$$

В дальнейших расчетах будем пренебречь величиной v^2 по сравнению с c^2 . В этом приближении

$$u = c - v \cos \alpha, \quad (606.2)$$

т. е. скорость светового сигнала в движущейся системе отчета равна фазовой скорости. Скорость света относительно движущейся системы координат зависит от направления его распространения. Относительно этой системы эфир ведет себя как покоящаяся, но анизотропная среда.

Установив это, допустим, что относительно эфира со скоростью v в направлении оси Z движется наблюдатель с дифракционной решеткой, плоскость которой параллельна плоскости XZ , а штрихи параллельны оси Y . Вторичные волны Гюйгенса, выходящие из двух соседних точек решетки A и B , удаленных друг от друга на период решетки d (рис. 145), приходят в точку C и там интерферируют. Первая волна на прохождение от решетки до точки C затрачивает время

$$t_1 = \frac{AC}{u(\theta_1)} = \frac{AC}{c - v \cos \theta_1} \approx \frac{AC}{c} \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta_1 \right),$$

а вторая

$$t_2 = \frac{BC}{u(\theta_2)} = \frac{BC}{c - v \cos \theta_2} \approx \frac{BC}{c} \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta_2 \right).$$

Так как $AC \cos \theta_1 = BC \cos \theta_2$, то разность времен равна

$$t_2 - t_1 = (BC - AC)/c.$$

Для наблюдения фраунгоферовой дифракции точку C надо удалить в бесконечность. Тогда в пределе $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, $BC - AC = d \sin \theta$, и мы получаем

$$t_2 - t_1 = d \sin \theta / c.$$

Для простоты предположим, что падающая волна распространяется в направлении оси Z (т. е. перпендикулярно к плоскости решетки). Тогда $\alpha = 0$, $\omega' = \omega - kv$. Вторичные волны Гюйгенса выходят из точек решетки A и B с одинаковыми фазами. В точку C они приходят с разностью фаз

$$\Delta = \omega' (t_2 - t_1) = (\omega - kv) \frac{d \sin \theta}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \left(1 - \frac{v}{c} \right) d \sin \theta.$$

Для того чтобы в направлении θ образовался главный дифракционный максимум, необходимо, чтобы разность фаз Δ составляла $2\pi m$, где m — целое число. Это дает

$$d \sin \theta = m\lambda', \quad (606.3)$$

где

$$\lambda' = \frac{\lambda}{1 - v/c}. \quad (606.4)$$

Таким образом, явление происходит так, как если бы эфир покоялся, а длина волны смешалась в красную сторону согласно формуле (606.4).

Разобранным методом нетрудно рассмотреть и случай наклонного падения света на решетку. Это предлагается сделать читателю.

607. $\Delta\lambda = 21 \text{ \AA}$.

608. $\delta\lambda = 0,046 \text{ \AA}$.

609. $\Delta\lambda \approx 450 \text{ \AA}$.

610. $\delta\lambda = 21 \text{ \AA}$.

611. Удаляется со скоростью $v = 1380$ км/с.

612. $\Delta\lambda = 1,1$ Å.

613. $v = 2$ км/с.

614. Если бы кольцо было сплошным твердым образованием, то его периферия должна была бы иметь большую линейную скорость, чем внутренние края. Напротив, если бы кольцо состояло из отдельных мелких спутников планеты, то для далеких и близких к планете спутников соотношение линейных скоростей было бы обратным. Наблюдая эффект Доплера от краев колец, можно определить, скорость какого края больше, и сделать тем самым однозначный выбор из обоих предположений.

А. А. Белопольский в 1896 г. нашел, что скорость внутреннего края кольца Сатурна равна 21 км/с, а внешнего 16 км/с. Отсюда следует, что кольцо Сатурна не может быть твердым образованием, а должно состоять из большого числа мелких спутников.

615. $V = 3600$ В.

616. $\lambda = 2v/\Delta v = 50$ см.

§ 9. Теория относительности и оптика движущихся тел

617. Фотоаппарат фиксирует лучи, которые приходят в него одновременно. Поэтому, вследствие конечности скорости света, точки предмета, лежащие дальше от фотоаппарата, чтобы дать вклад в изображение, должны испустить лучи раньше, чем более близкие точки.

Рассмотрим, например, светящийся предмет кубической формы со стороной l , пролетающий на большом расстоянии от точки фотографирования со скоростью v перпендикулярно к лучу света, направленному на фотоаппарат (рис. 146, а). Вследствие движения тыльная грань $ABEF$, невидимая при неподвижном кубе, становится видимой при движении, так как из точек E и F свет излучился на время l/c раньше, чем с грани $ABCD$, когда точки E и F находились в положении E' и F' . На фотографии (рис. 146, б) грань $ABEF$ выйдет в виде прямоугольника $A'B'E'F'$ со стороной $A'F' = \frac{v}{c} l$.

С другой стороны, грань $ABCD$ вследствие сокращения Лоренца будет сжатой в направлении движения в $\sqrt{1-v^2/c^2}$ раз так, что ее изображение $A'B'C'D'$ на фотографии получится в виде прямоугольника со стороной $A'D' = l \sqrt{1-v^2/c^2}$. Нетрудно видеть, что на фотографии общая форма движущегося куба не искажается, так как он кажется повернутым на угол $\phi = \arccos(v/c)$ при сохранении своих пропорций (рис. 146, б).

Аналогично, для движущегося шара вследствие совместного действия запаздывания света и сокращения Лоренца видимая форма шара не искажается: на фотографии он получается в форме круга. Чтобы наблюдать при помощи фотоаппарата сокращение Лоренца в чистом виде, нужно воспользоваться внешним источником освеще-

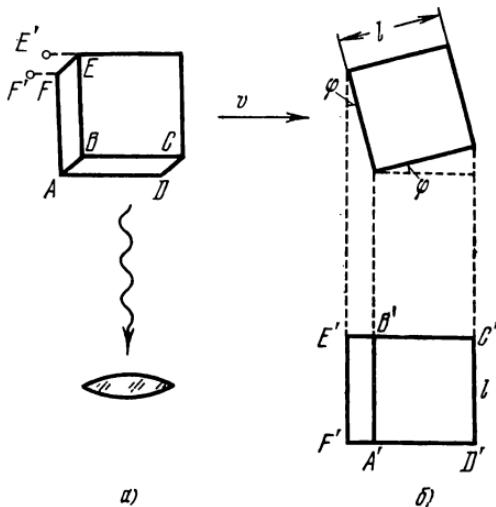


Рис. 146.

ния, например, лампой-вспышкой, который исключает кажущийся поворот движущихся предметов.

618. Никакой информации о влиянии ускорения на ход часов преобразования Лоренца не дают. На этот вопрос нельзя ответить без рассмотрения конкретного вида часов. Вопрос этот должен решаться экспериментально. Например, ускорение существенно влияет на ход маятниковых часов. А для многих часов (например, основанных на атомных и ядерных переходах) независимость их хода от ускорения установлена на опыте вплоть до гигантских ускорений.

619. Да, можно. В динамическом рассмотрении, однако, обычно нет необходимости (не говоря уже о том, что оно может оказаться очень сложным), поскольку результат следует уже из преобразований Лоренца и, следовательно, получится в любой лоренц-инвариантной динамической теории. Динамическое рассмотрение становится вместе с тем необходимым при детальном анализе нестационарных процессов, например соударений релятивистских частиц.

620. Размер системы в направлении движения $l_{\parallel} = 2d_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$, а в перпендикулярном направлении $l_{\perp} = d_0$.

621. Концентрация останется неизменной.

622. Плотность тока $j = ne(v_e - v_i)$ (e — заряд электрона, v_e — средняя скорость электронов, v_i — средняя скорость ионов). Ее максимальное значение $j_{\max} = 2nes$, поскольку абсолютные значения v_e и v_i не превосходят скорости света.

623. $\rho = \frac{\rho_0}{1 - (V/c)^2}$, где ρ_0 — плотность вещества в системе отсчета, где тело покоятся, а ρ — плотность того же вещества, измеренная в движущейся системе, V — скорость одной системы относительно другой.

$$624. \tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{E}{mc^2} \tau_0 \approx 9,5 \tau_0 \approx 2,1 \cdot 10^{-5} \text{ с.}$$

625. Решение. Систему отсчета, относительно которой наблюдатель покоятся, условимся считать неподвижной, а систему, в которой покоятся источник, — движущейся. Полагая (см. решение задачи 599) $v = v_{\text{ист}}$, $v_{\text{набл}} = 0$, $v_{\text{ист}} = v$, $\vartheta_{\text{ист}} = \vartheta$, получим

$$\frac{v}{v_1} = \frac{c}{c + v \cos \vartheta},$$

где v_1 — частота световой волны в месте нахождения источника, измеренная с помощью неподвижных часов. Если ее измерить с помощью движущихся часов (т. е. часов, неподвижных в системе источника), то благодаря замедлению хода последних мы получим вместо v_1 частоту

$$v_0 = v_{\text{ист}} = v_1 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = v/c,$$

и следовательно,

$$\frac{v}{v_0} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \vartheta} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \vartheta}.$$

1) При $\vartheta = 0$ $\frac{v}{v_0} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$.

2) При $\vartheta = \pi/2$ (поперечный эффект Доплера) $v = v_0 \sqrt{1 - \beta^2}$.

626. Полагая $v_{\text{ист}} = 0$, $v_{\text{набл}} = v$, $\vartheta_{\text{набл}} = \vartheta_0$, получим

$$\frac{v}{v_0} = \frac{1 + \beta \cos \vartheta_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

627. Искомая формула получится из требования, что отношение частот v/v_0 не должно зависеть от способа вычисления. Пусть одна и та же плоская световая волна наблюдается в двух системах отсчета K_0 и K , из которых вторая движется относительно первой со скоростью v . Источник покоятся в системе K_0 . Пусть ϑ_0 и ϑ — углы между направлением вектора Φ и обратными направлениями луча в этих системах. Тогда

$$\cos \vartheta - \cos \vartheta_0 = \beta (\cos \vartheta \cos \vartheta_0 - 1).$$

628.

$$\frac{v}{v_0} = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta n(v) \cos \Theta}, & \text{если } \beta n(v) \cos \Theta < 1, \\ \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta n(v) \cos \Theta - 1}, & \text{если } \beta n(v) \cos \Theta > 1, \end{cases}$$

где Θ — угол между вектором v и направлением луча, а $n(v)$ — показатель преломления среды.

629. Решение. Пусть в момент $t=t'$ начала обеих координатных систем совпадают между собой. В этот момент поставим отметку в той точке распространяющегося ряда плоских волн, которая проходит через начало координат. Произвольный наблюдатель A , находящийся в «неподвижной» системе отсчета, начинает счет проходящих мимо него волн в тот момент, когда мимо него проходит сделанная отметка. К моменту времени t он насчитает $N=\Phi/(2\pi)$ волн, где $\Phi=\omega t - \mathbf{k}r$ — фаза проходящей мимо него волны в момент t . Наблюдатель A' в «движущейся» системе отсчета производит такой же счет волн и к моменту t' насчитывает $N'=\Phi'/(2\pi)$ волн, где $\Phi'=\omega't' - \mathbf{k}'r'$. К моменту встречи мимо обоих наблюдателей пройдут одни и те же волны. Поэтому в момент встречи наблюдателей $N=N'$, а следовательно, $\Phi=\Phi'$. Это и доказывает требуемое соотношение, так как из рассуждения ясно, что t, r и t', r' означают время и координаты одного и того же события в «неподвижной» и «движущейся» системах отсчета.

630. Если α — угол между направлением пучка каналовых лучей и перпендикуляром к линии наблюдения, то должно быть

$$\alpha \ll v/2c = 0,22 \cdot 10^{-2} \text{ рад} = 7''.$$

Указанная в задаче трудность была преодолена Айвсом следующим способом. В спектрограф направлялось излучение не только непосредственно от каналовых частиц, но и их свет после отражения от зеркала. Плоскость зеркала была установлена перпендикулярно к оси спектрографа. Тогда, если пучок каналовых лучей образует с перпендикуляром к линии наблюдения угол α , то его изображение в зеркале составляет с этим перпендикуляром угол $-\alpha$. Таким образом, одновременно наблюдался продольный эффект Доплера, соответствующий продольным скоростям $+v \sin \alpha$ и $-v \sin \alpha$. Смещенные линии в продольном эффекте должны быть симметрично расположены относительно несмешенной линии. Поперечный же эффект Доплера должен дать для обоих случаев смещение в одну и ту же (красную) сторону. Опыт показал, что смещенные линии в этом случае расположены асимметрично относительно несмешенной линии. Именно, на продольное доплеровское смещение накладывается дополнительное смещение в красную сторону. По положению смещенных

линий относительно несмещенной можно рассчитать это дополнительное смещение. Айвс нашел, что в пределах ошибок измерений оно согласуется с релятивистской формулой для поперечного эффекта Доплера.

631. Из-за эффекта Доплера длина волны в системе координат, движущейся вместе с жидкостью, равна $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$, причем в первом приближении $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c/n}$. Здесь $n \equiv n(\lambda)$. Поэтому

$$n(\lambda') = n(\lambda + \Delta\lambda) \approx n + \frac{dn}{d\lambda} \Delta\lambda = n + \lambda n \frac{dn}{d\lambda} \frac{v}{c},$$

$$\frac{c}{n(\lambda')} = \frac{c/n}{1 + \lambda \frac{dn}{d\lambda} \frac{v}{c}} \approx \frac{c}{n} - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \frac{v}{n}.$$

Из релятивистской формулы сложения скоростей получим

$$\begin{aligned} v_\Phi &= \frac{\frac{c}{n(\lambda')} + v}{1 + \frac{v}{n(\lambda') c}} \approx \left(\frac{c}{n} - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \frac{v}{n} + v \right) \left(1 - \frac{1}{c} \frac{v}{n} \right) \approx \\ &\approx \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right). \end{aligned}$$

632. Решение. Если скорость частицы (в единицах скорости света) равна β , то ее энергия будет $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 / \sqrt{1 - \beta^2}$, где \mathcal{E}_0 — энергия покоя. Отсюда найдем β . По релятивистской теореме сложения скоростей скорость движущейся частицы в лабораторной системе отсчета будет $\beta' = \beta_{\text{отн}} = \frac{2\beta}{1 + \beta^2}$. Зная β , вычислим β' , а затем

$\sqrt{1 - \beta'^2}$. Получим $\sqrt{1 - \beta'^2} = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}_0^2}$ и далее

$$\mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{1 - \beta'^2}} = 2 \frac{\mathcal{E}^2}{\mathcal{E}_0} - \mathcal{E}_0.$$

В случае ультрарелятивистских движений $\mathcal{E}' = 2\mathcal{E}^2/\mathcal{E}_0$. Для протонов $\mathcal{E}_0 = 0,937$ ГэВ, $\mathcal{E}' \approx 213$ ГэВ.

633. $\Delta t = \frac{2L}{v} (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) \approx \frac{L}{c} \left(\frac{v}{c} \right) = 0,0143$ год = 5,24 сут.

634. $\mathcal{E} = mc^2 = 9 \cdot 10^{27}$ эрг = $9 \cdot 10^{20}$ Дж, $M = 13\,000$ т, $v = c \sqrt{3/2} = 2,6 \cdot 10^5$ км/с.

635. Решение. Пусть m и v — масса покоя и скорость ракеты в произвольный момент времени, а $m_{\text{газ}}$ и $v_{\text{газ}}$ — те же величины для газов, образовавшихся из топлива ракеты к этому моменту времени. Так как газы, уже покинувшие ракету, не оказывают влияния на ее

движение, то можно принять $m_{\text{газ}} = 0$. Однако $dm_{\text{газ}} \neq 0$, так как газы непрерывно образуются. На основании законов сохранения импульса и энергии

$$\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m_{\text{газ}}v_{\text{газ}}}{\sqrt{1-v_{\text{газ}}^2/c^2}} = \text{const}, \quad (635.1)$$

$$\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m_{\text{газ}}}{\sqrt{1-v_{\text{газ}}^2/c^2}} = \text{const}. \quad (635.2)$$

Дифференцируя уравнение (635.1) с учетом (635.2) и полагая в окончательном результате $m_{\text{газ}} = 0$, получим

$$\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} dv + (v - v_{\text{газ}}) d \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 0.$$

Согласно релятивистскому закону сложения скоростей

$$v_{\text{газ}} = \frac{v - u}{1 - vu/c^2}. \quad (635.3)$$

Исключая $v_{\text{газ}}$, после несложных преобразований находим

$$\frac{dv}{v^2 - c^2} = \frac{u}{c^2} \frac{dm}{m}.$$

Интегрируя в предположении постоянства u , получим

$$\frac{m_0}{m} = \left(\frac{1 - \beta_0}{1 + \beta_0} \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{c/2u}, \quad (635.4)$$

где $\beta = v/c$, $\beta_0 = v_0/c$. Если начальная скорость v_0 равна нулю, то

$$\frac{m_0}{m} = \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{c/2u}. \quad (635.5)$$

При ускорении ракеты $u > 0$, при торможении $u < 0$.

636.

$$\frac{m_0}{m} = \exp \left\{ \frac{v - v_0}{u} \right\} \quad (636.1)$$

(формула Циолковского).

637. $m_0 = m \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{c/2u} = 2,84 \cdot 10^{4515}$ т. Эта цифра невообразимо велика (масса Земли $6 \cdot 10^{21}$ т, масса Солнца $2 \cdot 10^{27}$ т, масса Галактики $\sim 3 \cdot 10^{38}$ т). Было бы необоснованной экстраполяцией применять к телам таких размеров, если бы они существовали, законы физики, установленные для тел совсем других масштабов. Приведенный расчет показывает, однако, иллюзорность и полную бессмыслисть пытаться решить проблему межзвездных сообщений с помощью ракет на химическом топливе. Идеальной для решения этой проблемы была бы фотонная ракета, в которой роль газовой струи играет световое излучение, испускаемое ракетой. В этом случае u достигает

пределного значения $u=c$. Для фотонной ракеты формула (635.5) переходит в

$$\frac{m_0}{m} = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{1/2}. \quad (637.1)$$

638. Решение. Время τ , которое пройдет на ракете (если предположить, что она движется с постоянной скоростью v относительно Земли), связано с земным временем соотношением

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1-\beta^2} dt = \sqrt{1-\beta^2} t,$$

где $\beta = v/c$. Время t , необходимое для прохождения расстояния R , равно R/v . Отсюда для заданных τ и R получаем необходимую скорость:

$$v = \frac{c}{\sqrt{1+c^2\tau^2/R^2}} \approx c \left(1 - \frac{1}{2} \frac{c^2\tau^2}{R^2} \right) \approx c (1 - 0,963 \cdot 10^{-10}).$$

Для нахождения искомого отношения масс применим формулу (635.4) к фотонной ракете. При ускорении ракеты $u=+c$, при торможении $u=-c$. Если M_0 — начальная, M_k — конечная массы ракеты, а M — масса в конце ускорения (равная массе в начале торможения), то

$$\frac{M_0}{M} = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{1/2}, \quad \frac{M}{M_k} = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^{-1/2} = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\frac{M_0}{M_k} = \frac{1+\beta}{1-\beta} = \frac{4R^2}{c^2\tau^2}. \quad (638.1)$$

По этой формуле находим $M_0/M_k \approx 4 \cdot 10^{10}$.

639. Решение. Пусть в системе координат K , связанной с Землей, в момент времени t система координат K' , связанная с космическим кораблем, имеет скорость v , равную скорости корабля в данный момент. В следующий бесконечно близкий момент $t+dt$ скорость космического корабля в системе K будет равна $u+du$, а в системе K' некоторой величине du' . Так как в рассматриваемый момент t системы K и K' движутся друг относительно друга с постоянной скоростью v , то, применив формулу сложения скоростей, получим

$$u + du = \frac{u + du'}{1 + u du'/c^2}.$$

Пренебрегая бесконечно малыми второго порядка, будем иметь

$$du' = \frac{1}{1-\beta^2} du,$$

где $\beta = u/c$. Промежутки времени dt' и dt в системах K и K' связаны соотношением $dt' = \sqrt{1-\beta^2} dt$, а, следовательно, ускорения — соотношением

$$\frac{du'}{dt'} = \frac{1}{(1-\beta^2)^{3/2}} \frac{du}{dt}.$$

По условию $du'/dt' = a = \text{const}$, поэтому

$$du/dt = a(1-\beta^2)^{3/2}.$$

Интегрируя с начальным условием $t=0$, $u=0$, получим

$$u = \frac{at}{\sqrt{1+a^2t^2/c^2}}.$$

Учитывая, что $u=ds/dt$ и интегрируя еще раз при условии $t=0$, $s=0$, получим выражение для проходимого пути s :

$$s = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right), \quad \text{или} \quad t = \frac{s}{c} \sqrt{1 + \frac{2c^2}{as}}.$$

На плоскости s , t последние уравнения представляют гиперболы (отсюда и название «гиперболическое» движение). Таким образом, в системе K , связанной с Землей, для прохождения расстояния $s=R/2$ кораблю понадобится время

$$t = \frac{R}{2c} \sqrt{1 + \frac{c^2}{aR}}.$$

В системе же K' собственное время τ будет равно

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt = \frac{c}{a} \ln \left\{ \frac{a}{c} t + \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} \right\},$$

или

$$\tau = \frac{c}{a} \operatorname{Arsh} \frac{at}{c} = \frac{c}{a} \operatorname{Arsh} \left\{ \frac{Ra}{2c^2} \sqrt{1 + \frac{c^2}{aR}} \right\}.$$

На все путешествие понадобится вдвое большее время $\tau_0 = 2\tau$:

$$\tau_0 = \frac{2c}{a} \operatorname{Arsh} \left\{ \frac{Ra}{2c^2} \sqrt{1 + \frac{c^2}{aR}} \right\}.$$

Для больших расстояний R , для которых $R \gg 2c^2/a \equiv R_0$ (в данном случае для $a=10$ м/с², $R_0=2$ световых года), последняя формула принимает вид

$$\tau_0 \approx \frac{2c}{a} \ln \left\{ \frac{aR}{c^2} \right\} \approx 21 \text{ год.}$$

640. Решение. В системе координат, связанной с ракетой, $dp'/dt = M'a$, где M' — масса ракеты с топливом. Изменение импульса p' равно по абсолютной величине изменению импульса излученного

света и противоположно по направлению:

$$dp'_r = -\frac{1}{c} d\mathcal{E}_f = -c dM',$$

где $d\mathcal{E}_f = c^2 dM'$ — изменение энергии излученного света. Отсюда
 $M'a = -c dM'/dt$.

Расходуемая мощность

$$\omega = d\mathcal{E}_f/dt = M'ac.$$

Конечная масса ракеты M_k связана с начальной массой M_0 соотношением (см. задачу 638)

$$M_k = M_0 \frac{1-\beta}{1+\beta} \quad M_0 = \frac{1+\beta}{1-\beta} M_k,$$

где $\beta = v/c$, v — максимальная скорость ракеты (скорость в середине пути). Для равноускоренного движения (см. решение задачи 639)

$$\beta = \frac{\frac{a}{c} t}{\sqrt{1+a^2 t^2/c^2}}, \quad t = \frac{R}{2c} \sqrt{1+\frac{c^2}{aR}},$$

откуда

$$\beta = \left[1 + 4 \frac{c^4}{R^2 a^2} \left(1 + \frac{c^2}{aR} \right)^{-1/2} \right]^{-1/2} \approx 1 - \frac{2c^4}{R^2 a^2},$$

Подставляя это значение, найдем, что необходимая мощность в начале пути равна

$$\omega_0 = M_0 ac = \frac{1+\beta}{1-\beta} ac M_k \approx M_k ac \frac{R^2 a^2}{c^4} \approx 3 \cdot 10^{31} \text{ эрг/с.}$$

Если сравнить это с мощностью взрыва первой атомной бомбы, при котором примерно за 10^{-6} с выделилось $5 \cdot 10^{20}$ эрг, то мы получим, что для данной ракеты необходимо в секунду расходовать энергию $6 \cdot 10^4$ таких бомб.

641. Решение. Пренебрегая движением атомов водорода относительно Земли, находим, что интенсивность $P(t)$ космического излучения, состоящего из атомов водорода, налетающих на корабль, растет в первую половину пути по закону

$$P(t) = n \mathcal{E}_H(t) \cdot v(t),$$

где $n = n_0 / \sqrt{1 - \beta^2(t)}$ — плотность водорода в системе координат, связанной с кораблем, $\mathcal{E}_H = m_H c^2 / \sqrt{1 - \beta^2(t)}$ — энергия одного атома водорода в той же системе, $\beta(t) = v(t)/c$ — скорость корабля относительно Земли (и относительно водородного газа).

Для равноускоренного движения (см. задачу 639)

$$\beta(t) = \frac{at/c}{\sqrt{1+a^2 t^2/c^2}}.$$

Таким образом,

$$P(t) = n_0 m_H c^3 \frac{\beta(t)}{1 - \beta^2(t)} = n_0 m_H c^2 a t \sqrt{1 + a^2 t^2/c^2}.$$

Максимальное значение эта величина имеет для середины пути, где

$$t = \frac{R}{2c} \sqrt{1 + \frac{c^2}{aR}}. \text{ Оно равно}$$

$$\begin{aligned} P_{\max} &= n_0 m_H c^2 \frac{aR}{2c} \sqrt{1 + \frac{c^2}{aR}} \left(1 + \frac{Ra}{2c^2}\right) \approx \\ &\approx n_0 m_H c^3 \left(\frac{aR}{2c^2}\right)^2 \approx 6,3 \cdot 10^{15} \text{ эрг/(см}^2 \cdot \text{с).} \end{aligned}$$

Для сравнения отметим, что интенсивность космических лучей, приходящих на Землю, $P_3 = 3 \cdot 10^{-3}$ эрг/(см²·с).

642. Решение. Вследствие aberrации происходит смещение видимого положения звезд на небесной сфере. По сравнению с земным наблюдателем для космонавта звезды как бы сбегаются к точке небесной сферы, к которой направлена скорость движения корабля, и разбегаются от диаметрально противоположной точки. Это смещение видимого положения описывается соотношением

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}, \text{ или } \sin \theta' = \sin \theta \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta},$$

где $\beta = v/c$, v — скорость корабля относительно Земли, θ' — угол между направлением полета и звездой в системе корабля, а θ — тот же угол в системе Земли. Например, при галактической скорости $\beta = 1 - 0,5 \cdot 10^{-8}$ звезды, расположенные в полусфере в земной системе координат, на космическом корабле будут видны в пределах конуса с углом раствора $2\theta' \approx 0,6$ угловых минут.

643. Решение. Обозначим через K систему координат, в которой неподвижен радиолокатор, а через K' — систему, в которой неподвижен предмет. Оси X и X' выберем так, чтобы они были параллельны друг другу и направлению скорости предмета в системе K (рис. 147). На предмет падает и от него отражается излучение от радиолокатора, которое в системе K' благодаря эффекту Доплера имеет частоту

$$\omega' = \omega \frac{1 - \beta \cos \varphi}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (643.1)$$

где $\beta = v/c$, φ — угол между осью X и направлением на предмет в системе K (см. задачу 626). Таким образом, в системе K' предмет играет роль радиопередатчика, излучающего частоту ω' в направлении радиолокатора, которое в этой системе составляет некоторый угол ψ' с осью X' (этот угол, вообще говоря, отличается от угла $\psi = \pi + \varphi$, который составляет это направление с осью X' в системе K').

Закон преобразования углов легче всего получить из формулы сложения скоростей

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v / c^2} \quad \text{или} \quad u \cos \psi = \frac{u' \cos \psi' + v}{1 + vu' \cos \psi' / c^2}, \quad (643.2)$$

применяя ее к распространению света. Учитывая, что скорость света

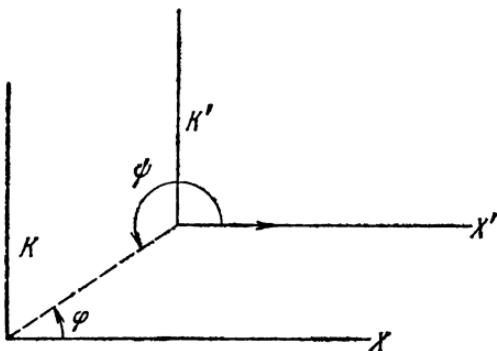


Рис. 147.

постоянна во всех инерциальных системах $u = u' = c$, получим

$$\cos \psi = \frac{\cos \psi' + \beta}{1 + \beta \cos \psi'}, \quad (643.3)$$

откуда

$$\cos \psi' = \frac{\cos \psi - \beta}{1 - \beta \cos \psi}. \quad (643.4)$$

Учитывая, что в системе K' радиолокатор движется относительно предмета со скоростью $-v$, перейдем снова к системе K . В этой системе частота принимаемого радиолокатором отраженного сигнала выражается формулой

$$\omega_* = \omega' \frac{1 + \beta \cos \psi'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \omega \frac{1 - \beta \cos \varphi}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{1 + \beta \cos \psi'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (643.5)$$

Используя формулу (643.4) и равенство $\psi = \pi + \varphi$, получим

$$\omega_* = \omega \frac{1 - \beta \cos \varphi}{1 + \beta \cos \varphi}. \quad (643.6)$$

Отметим, что при $\varphi = \pi/2$, т. е. при движении предмета перпендикулярно к радиусу-вектору, соединяющему его с радиолокатором, никакого смещения частоты отраженного сигнала (принимаемого тем же радиолокатором) не наблюдается.

644. Все орбиты образуют семейство окружностей с общей касательной в точке ускорения. Поэтому максимальное расстояние

между s -й и $(s-1)$ -й окружностью

$$\Delta s = R_s - R_{s-1} = \frac{mc^2}{eH_0} \left[s \sqrt{1 - \frac{1}{n^2 s^2}} - (s-1) \sqrt{1 - \frac{1}{n^2 (s-1)^2}} \right].$$

Это расстояние монотонно растет с увеличением s и будет максимальным для последней орбиты $s = N$:

$$\begin{aligned} \Delta N &= \frac{mc^2}{eH_0} \left[N \sqrt{1 - \frac{1}{n^2 N^2}} - (N-1) \sqrt{1 - \frac{1}{n^2 (N-1)^2}} \right] \approx \\ &\approx \frac{mc^2}{eH_0} \approx 1,7 \text{ см.} \end{aligned}$$

Энергия на выходе микротрона $\mathcal{E}_N = N n m c^2 \approx 12 \text{ МэВ}$.

645. Решение. Пусть монохроматический свет приходит к наблюдателю от удаленного источника. Обозначим через v_0 частоту света, воспринимаемую наблюдателем, покоящимся в какой-либо инерциальной системе отсчета. Если в момент времени $t=0$ наблюдатель начнет двигаться к источнику с постоянным ускорением a (рис. 148, а), то к моменту t он приобретет скорость $v = at$, а свет пройдет путь $l = ct$. Произойдет изменение частоты света, воспринимаемого наблюдателем. Если пренебречь величинами порядка $(v/c)^2$, то по принципу Доплера изменение частоты будет определяться выражением

$$(v - v_0)/v_0 = v/c = at/c = al/c^2.$$

Пусть теперь наблюдатель покится в инерциальной системе отсчета, но есть однородное гравитационное поле $g = -a$ (рис. 148, б).

Тогда согласно принципу эквивалентности должно наблюдаться в точности такое же изменение частоты, что и в предыдущем случае, т. е.

$$(v - v_0)/v_0 = gl/c^2, \quad (645.1)$$

где l — расстояние, проходимое светом в направлении гравитационного поля. Если гравитационное поле неоднородно, то полученную формулу можно применять для каждого бесконечно малого участка пути, проходимого светом. При этом составляющая гравитационного поля, перпендикулярная к направлению распространения света, на

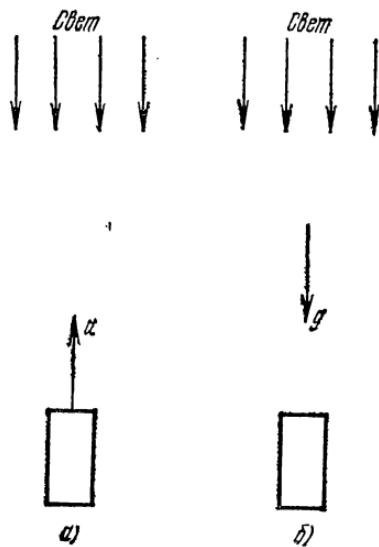


Рис. 148.

его частоту не влияет. Поэтому

$$d\nu/\nu = g dr/c^3.$$

Для перехода к конечным изменениям частоты надо это выражение проинтегрировать. Путь интегрирования можно выбрать произвольно, так как гравитационное поле — потенциальное. В результате:

$$\ln \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{1}{c^2} \int g dr = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{c^2}, \quad (645.2)$$

где $\Phi_1 - \Phi_2$ — разность гравитационных потенциалов между начальной и конечной точками пути, вдоль которого распространяется свет. При распространении света от высшего гравитационного потенциала к низшему его частота увеличивается, при распространении в противоположном направлении — уменьшается.

$$646. N \geq \frac{\alpha}{m} \left(\frac{c}{v} \right)^2 = 2,3 \cdot 10^6.$$

647. В красную.

648. $\Delta\lambda/\lambda \approx GM/r_0c^2 \approx 0,075$, где G — гравитационная постоянная, $r_0 \approx 2 \cdot 10^8$ см — радиус звезды, найденный по среднему расстоянию между нейтронами.

$$649. \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{gRh}{c^2(R+h)} = 7,8 \cdot 10^{-11}; \text{ в фиолетовую.}$$

$$650. \Delta\nu/\nu = gh/c^2 = 5,45 \cdot 10^{-13}.$$

651. При круговом движении спутника $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{h}{R} \frac{v^2}{c^2}$. При эллиптическом движении в правой части появится коэффициент порядка единицы.

$$652. \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c} \cos \Theta - \frac{v^2}{2c^2} (1 - 2 \cos^2 \Theta) + \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{c^2}.$$

$$1) \Theta = \pi/2, \frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{v^2}{2c^2} + \frac{gRh}{c^2(R+h)} = -2,3 \cdot 10^{-10}.$$

$$2) \Theta = 89^\circ, \Delta\nu/\nu = 4,38 \cdot 10^{-7}.$$

653. Решение. Будем считать, что свет состоит из корпускул с массой m (например, пусть $m = h\nu/c^2$, где $h\nu$ — энергия фотона). Такая корпускула сможет удалиться от тела с массой M с расстояния r на бесконечность при условии $mv^2/2 \geq GMm/r$, где v — радиальная скорость корпускулы. Полагая $v=c$, получаем отсюда условие невидимости поверхности звезды $r \leq r_g = 2GM/c^2 \approx 3M/M_C$ км, где M_C — масса Солнца. Ответ не зависит от массы корпускулы m , но применение нерелятивистских соотношений к свету делает случайным точное совпадение полученного результата с тем, что дает общая теория относительности. Радиус r_g называется гравитационным радиусом тела.

§ 10. Давление света

654. $P = u(1+r) \cos^2 \varphi$, где u — плотность энергии падающей волны; $T = \frac{1}{2}u(1-r) \sin 2\varphi$.

Решение. Если N — число фотонов падающей волны в единице объема, то импульс фотонов, упавших в 1 с на зеркало, равен $(Nh\nu/c)cS \cos \varphi$, где S — площадь зеркала. Так как $Nh\nu = u$, то этот импульс равен $\mathbf{p}_1 = uS \cos \varphi \cdot \mathbf{i}$, где \mathbf{i} — единичный вектор, проведенный в направлении падающего луча. Импульс отраженных в 1 с фотонов $\mathbf{p}_2 = ruS \cos \varphi \cdot \mathbf{i}'$, где \mathbf{i}' — единичный вектор в направлении отраженного луча. Таким образом, изменение импульса световой волны в 1 с вследствие отражения от зеркала равно

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = -uS(\mathbf{i} - r\mathbf{i}') \cos \varphi.$$

В силу закона сохранения импульса изменение импульса зеркала будет таким же по величине, но противоположным по направлению. Поэтому сила \mathbf{F} , действующая на зеркало со стороны излучения, равна

$$\mathbf{F} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = uS(\mathbf{i} - r\mathbf{i}') \cos \varphi,$$

а сила \mathbf{f} , действующая на единицу площади зеркала,

$$\mathbf{f} = u(\mathbf{i} - r\mathbf{i}') \cos \varphi.$$

Проектируя это выражение на нормаль к зеркалу и на плоскость зеркала, получим результаты, приведенные в ответе.

655. $P = u(\cos^2 \varphi + \frac{1}{2} \cos \varphi)$; $T = \frac{1}{2}u \sin 2\varphi$.

Решение. Если отражающая поверхность идеально матовая, то она отражает падающее на нее световое излучение целиком, причем после отражения получатся лучи всевозможных направлений, и все эти направления равновероятны. Вероятность того, что направление распространения отразившегося фотона составляет с нормалью к зеркалу угол между ϑ и $\vartheta + d\vartheta$, равна $(1/2\pi) d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta$, так как соответствующий элемент телесного угла $d\Omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$. Результирующий импульс всех отразившихся фотонов будет перпендикулярен к плоскости зеркала. Среднее значение проекции импульса одного отраженного фотона на нормаль к зеркалу равно

$$\int_0^{\pi/2} \frac{h\nu}{c} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2} \frac{h\nu}{c}.$$

Следовательно, для результирующего импульса всех отразившихся фотонов мы получим

$$\mathbf{p}_2 = NcS \cos \varphi \cdot \frac{1}{2} \frac{h\nu}{c} \mathbf{n} = \frac{1}{2} uS \cos \varphi \mathbf{n},$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности зеркала. Сила же \mathbf{f} , действующая на единицу площади зеркала, будет равна

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2}{S} = u \left(\mathbf{i} - \frac{1}{2} \mathbf{n} \right) \cos \varphi.$$

Проектируя это выражение на нормаль \mathbf{n} и плоскость зеркала, получим результаты, приведенные в ответе.

657. $P = u/3$, где u — плотность излучения.

658. 1) $P_1 = 0,46$ дин/ m^2 или приблизительно полмиллиграмма на квадратный метр; 2) $P_2 = 2P_1 = 0,92$ дин/ m^2 ; 3) $P_3 = \frac{8}{3}P_1 = 0,69$ дин/ m^2 .

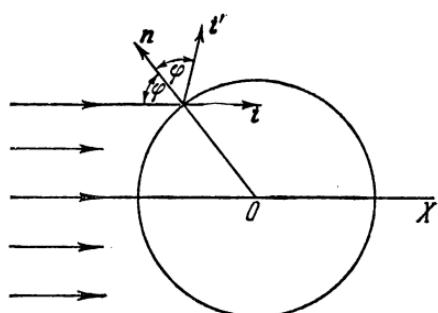


Рис. 149.

659. $F = Q/c \approx 3,5 \times 10^{-5}$ дин.

660. 1) $F = Su$, где S — площадь диаметрального сечения шара, u — плотность энергии падающей волны; 2) $F = Su$; 3) $F = \frac{4}{3}Su$.

Решение. Так как размеры шара велики по сравнению с длиной световой волны, то при решении задачи можно ограни-

читься приближением геометрической оптики и не учитывать дифракцию. Чтобы объединить оба первых случая, допустим, что коэффициент отражения поверхности шара равен r и не зависит от угла падения φ . Сила \mathbf{f} , действующая на единицу поверхности шара, равна $f = u \cos \varphi (\mathbf{i} - r\mathbf{i}')$ (см. решение задачи 654). Направим ось X параллельно падающим лучам (рис. 149). В силу симметрии результирующая сила светового давления на шар должна быть направлена вдоль оси X и равна $F = \int f_x dS$, где dS — элемент поверхности шара, а интегрирование ведется по освещенной половине этой поверхности. Имеем

$$f_x = u \cos \varphi - ru \cos \varphi \cos(\pi - 2\varphi) = (1 - r)u \cos \varphi + 2ru \cos^3 \varphi.$$

Далее, $dS = 2\pi a^2 \sin \varphi d\varphi$, где a — радиус шара. Интегрирование дает $F = \pi a^2 u$. Таким образом, сила F не зависит от коэффициента отражения и одинакова для абсолютно зеркального и абсолютно черного шаров. Решение в случае идеально матовой поверхности шара производится таким же методом и дает $F = \frac{4}{3}\pi a^2 u$.

661. На идеально отражающий шар световое давление будет больше.

Решение. Если бы коэффициент отражения r не зависел от угла падения, то сила светового давления в обоих случаях была бы

одинакова (см. решение предыдущей задачи). Однако в действительности r зависит от угла падения, и поэтому сила давления будет в обоих случаях различна. Пусть луч AB (рис. 150) падает на шар под углом падения $\varphi = 45^\circ$. Тогда отраженные фотоны будут распространяться перпендикулярно к падающему лучу и каждый из них передаст шару импульс $h\nu/c$. Если же фотон падает на шар в пределах поверхности, ограниченной окружностью BD , то, отразившись, он будет иметь слагающую импульса, направленную противоположно распространению падающего света; в этом случае он передаст шару импульс, больший чем $h\nu/c$. Напротив, если фотон попадет на шар в пределах кольца $BEFD$, то переданный им импульс будет меньше $h\nu/c$. Если r не зависит от угла падения, то избытки переданных импульсов по сравнению с $h\nu/c$ на круге BD будут полностью компенсированы недостатками на кольце $BEFD$. В действительности r зависит от угла падения. Для неполяризованного света r возрастает с возрастанием угла падения. Поэтому недостатки переданных импульсов на кольце $BEFD$ будут превосходить по величине избытки их на круге BD . Отсюда следует, что сила светового давления на шар, частично отражающий свет, будет меньше, чем в случае идеально отражающего шара.

$$662. F_1 = 5,9 \cdot 10^{13} \text{ дин} = 60\,000 \text{ тс. } \frac{F_1}{F_2} = \frac{3}{16} \frac{aT^2}{\pi^2 a R \delta} = 1,6 \cdot 10^{-14}.$$

Здесь a — радиус земного шара, R — расстояние Земли до Солнца, T — время обращения Земли вокруг Солнца. По сравнению с силой тяготения сила светового давления ничтожно мала, и ее влияние на движение планет лежит далеко за пределами точности астрономических измерений.

$$663. a < \frac{3}{16} \frac{aT^2}{\pi^2 R \delta} = 5,8 \cdot 10^{-5} \text{ см. Результат получен в предположении, что в рассматриваемом случае применима геометрическая оптика. На самом деле, так как вычисленное значение } a \text{ того же порядка, что и длина световой волны, здесь существенно влияние дифракции. При учете последней } a \text{ получится, очевидно, меньше, так как свет давит не только на переднюю, но и на заднюю сторону шарика. Поэтому геометрическая оптика может дать лишь верхнюю границу для } a.$$

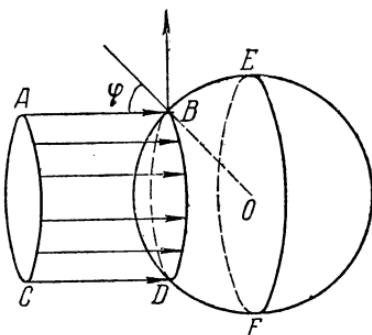


Рис. 150.

664. $u' = u(1 \pm 4v/c)$, где u — плотность энергии падающей волны, u' — отраженной, а v — скорость движения зеркала. Знак плюс соответствует движению зеркала навстречу распространению света, а знак минус — противоположному случаю.

Решение. Вообразим бесконечно длинный цилиндр, в котором без трения медленно движется зеркальный поршень со скоростью v ($v \ll c$). В цилиндре в направлении движения поршня распространяется цуг волн, длина которого $l = c$. Пусть в момент времени O голова цуга достигла поршня. Тогда, как нетрудно рассчитать, конец цуга достигнет поршня в момент времени $t = c/(c-v)$. За это время поршень пройдет путь $x = vt = vc/(c-v)$, а головной фронт отраженной волны — путь ct . Поэтому длина отраженного цуга будет

$$l' = ct + x = c \frac{c+v}{c-v}.$$

Если площадь поршня равна единице, то изменение энергии световой волны в этом процессе равно $u'l' - ul$. При этом световое давление P произвело работу Px . Следовательно,

$$ul = u'l' + Px.$$

При медленном движении поршня световое давление можно принять равным $P = 2u$, если пренебречь добавочными членами порядка $u(v/c)$. Подставляя в предыдущее выражение значения P , x , l , l' , получим результат, приведенный в ответе для удаляющегося поршня. Этот результат верен, если пренебречь величинами порядка $(v/c)^2$.

665. Если интенсивность пучка так велика, что он вызывает на поверхности тела энергичное испарение, то сообщаемый телу импульс может значительно превосходить величину $2uSt$. Объясняется это тем, что испаряющиеся в вакуум частицы уносят импульс, в результате чего тело испытывает отдачу.

666. Напряженность электрического поля E_0 в нефокусированном пучке оценим по формуле $W = \frac{c}{4\pi} \bar{E} \bar{H} S = \frac{c}{4\pi} \bar{E}^2 S$, а давление излучения P_0 — по формуле $P_0 = \frac{W}{cS}$. Таким путем находим

$$E_0 \approx \sqrt{\frac{4\pi W}{cS}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 1,45 \cdot 10^3}{cS}} \text{ СГСЭ} = 4,3 \cdot 10^5 \text{ В/см.}$$

$$P_0 \approx 1,67 \cdot 10^6 \text{ дин/см}^2 \approx 0,16 \text{ атм.}$$

В фокусе можно пользоваться теми же формулами, вычислив предварительно ширину пучка. Для оценки будем считать, что весь свет концентрируется в пределах центрального светлого кружка с радиусом $R = 0,61 f\lambda/r$ и площадью $\pi R^2 = \pi (0,61 f\lambda/r)^2 = (0,61 \cdot \pi f\lambda)^2 / S$, где r — радиус поперечного сечения падающего пучка. Эту площадь и надо подставить в предыдущие формулы вместо S . В результате

получим

$$E \approx \sqrt{\frac{S}{\epsilon_0}} \approx \frac{S}{0,61 \pi f \lambda} E_0 = 1,5 \cdot 10^3 E_0 = 6,4 \cdot 10^8 \text{ В/см},$$

$$P = \left(\frac{S}{0,61 \pi f \lambda} \right)^2 P_0 = 2,25 \cdot 10^6 P_0 \approx 3,6 \cdot 10^5 \text{ атм.}$$

667. 1) $P = \frac{\Phi}{c \tau S} (1 + r) = \frac{2}{3} (1 + r)$ дин/см², где r — коэффициент отражения поверхности; 2) $P \approx \frac{\Phi}{c \tau \lambda^2} \approx 150 (1 + r)$ атм; 3) $E \approx \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{8 \pi \Phi}{c \tau}} \approx 6 \cdot 10^4$ СГСЭ $\approx 1,8 \cdot 10^7$ В/см.

§ 11. Молекулярная оптика и смежные вопросы из других разделов физики

668. $\alpha = \frac{n-1}{2\pi N} = 2,66 \cdot 10^{-21} \text{ см}^3$.

670. $v_{\max} = eE_0/(m\omega) = eE_0\lambda/(2\pi mc) \approx 5,3 \text{ см/с}; F_m/F_e = v_{\max}/2c \approx 0,9 \cdot 10^{-10}$. Несмотря на свою малость, сила F_m играет важную роль, так как именно она обуславливает световое давление. (См. решение задачи 671.)

671. $\bar{F} = \frac{1}{2} \frac{\frac{e^2}{mc} E_0^2 \omega^2 \gamma}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\gamma\omega)^2} = \frac{\epsilon}{c}, \quad \epsilon = \frac{1}{2} \frac{\frac{e^2}{m} E_0^2 \omega^2 \gamma}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\gamma\omega)^2},$ где E_0 — амплитуда электрического поля световой волны.

Решение. Если волна распространяется в направлении оси Z , вектор E направлен вдоль оси X , а вектор H — вдоль оси Y , то

$$E = E_x = E_0 \cos \omega t, \quad H = H_y = H_0 \cos \omega t.$$

Если пренебречь действием магнитного поля, то уравнение движения электрона можно записать в виде

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} E_0 \cos \omega t.$$

Интегрируя его, находим скорость электрона \dot{x} в установившемся вынужденном колебании:

$$\dot{x} = \frac{\frac{e}{m} E_0 \omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \{ \gamma \omega \cos \omega t + (\omega^2 - \omega_0^2) \sin \omega t \}.$$

На колеблющийся электрон будет действовать сила $F = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}]$ со стороны магнитного поля световой волны. Эта сила, как легко

видеть, будет направлена по оси Z . Она равна

$$F = \frac{e}{c} H_y \dot{x} =$$
$$= \frac{\frac{e^2}{mc} E_0^2 \omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \{ \gamma\omega \cos \omega t + (\omega^2 - \omega_0^2) \sin \omega t \} \cos \omega t.$$

Усредняя это выражение по времени, получим результат, приведенный в ответе.

Энергия, поглощаемая электроном в 1 с, равна работе силы трения $m\gamma\dot{x}$ в течение этого времени, т. е.

$$\int_0^1 m\gamma\dot{x}^2 dt.$$

Интегрирования и усреднение по времени дает ϵ .

672. 1) p/p_0 порядка 10^{-8} , где p — индуцированный момент;
2) p/p_0 порядка 10^{-5} .

673. Невыполнение закона $v=c/\sqrt{\epsilon}$ объясняется наличием большого постоянного дипольного момента у молекулы воды ($1.8 \cdot 10^{-18}$ СГСЭ), не играющего роли в оптических явлениях для частот видимого спектра. Для низких частот (радиоволны) дипольные молекулы воды за период колебания электромагнитного поля успевают преимущественно ориентироваться в направлении электрического поля. Поэтому поляризуемость среды и ее показатель преломления для таких частот будут зависеть от наличия у молекул постоянных дипольных моментов. Показатель преломления радиоволн равен квадратному корню из статической диэлектрической проницаемости (для воды $n=\sqrt{\epsilon}=\sqrt{81}=9$). Но уже в области сантиметровых волн постоянные дипольные моменты молекул воды не успевают ориентироваться в направлении электрического поля. В этой области показатель преломления резко убывает с возрастанием частоты. В оптической области частот дипольные молекулы практически перестают поворачиваться под действием электрического поля световой волны, и их постоянные моменты не влияют на показатель преломления.

674. $n=1,107$.

675. $\epsilon = 1 - \frac{4\pi e_e^2 N_e}{m_e \omega^2} - \sum \frac{4\pi e_i^2 N_i}{m_i \omega^2}$, где N_e и N_i — концентрации

(т. е. числа частиц в 1 см³) электронов и ионов, e_e , e_i , m_e , m_i — их заряды и массы. Суммирование ведется по всем ионам. В силу кванзинейтральности ионосферы концентрация положительных ионов с большой точностью равна сумме концентраций электронов и отрицательных ионов. Поэтому последним слагаемым в выражении для ϵ

можно пренебречь, поскольку масса иона велика по сравнению с массой электрона. Сделав это и опуская значок «э», получим

$$\varepsilon = 1 - \omega_0^2/\omega^2, \quad \text{где } \omega_0 = 4\pi e^2 N/m.$$

676. Может: $n < 1$ для радиоволн в ионосфере; $n < 1$ для рентгеновских лучей.

677. В области аномальной дисперсии имеется сильное поглощение, и величина $u = v - \lambda dv/d\lambda$, как скорость распространения сигнала или скорость распространения энергии, теряет смысл. (Формула для групповой скорости выводится в предположении, что поглощения нет или оно мало.)

678. Полагая $\sqrt{\varepsilon} = \pm ik$, преобразуем выражение $E = E_0 e^{i(\omega t - kz)}$ к виду:

$$E = E_0 e^{\kappa z} e^{i\omega t}, \quad \text{или} \quad E = E_0 e^{-\kappa z} e^{i\omega t}.$$

В вещественной форме

$$E = E_0 e^{\kappa z} \cos \omega t, \quad \text{или} \quad E = E_0 e^{-\kappa z} \cos \omega t.$$

Это — стоячие волны. Амплитуда первой волны экспоненциально возрастает, а второй — экспоненциально затухает в направлении оси Z . Выбор знака перед κ должен определяться физическими условиями. В обоих случаях есть затухание, но нет поглощения.

679. Если $\omega > \omega_0$, то волна пройдет через ионосферу; если $\omega < \omega_0$, то волна полностью отразится. Здесь

$$\omega_0 = \sqrt{4\pi N_{\max} e^2/m} = 5,64 \cdot 10^4 \sqrt{N_{\max}} \text{ с}^{-1},$$

где N_{\max} — концентрация электронов на такой высоте, где она максимальна.

$$680. N = \pi m v^2 / e^2 = 1,24 \cdot 10^{-8} v^2.$$

681. Чтобы радиоволна могла достигнуть Земли, ее длина должна быть $\lambda < 3,34 / \sqrt{N \cdot 10^6} \text{ см} = 2,3 \cdot 10^2 \text{ см} = 2,3 \text{ м}$.

$$682. v = \sqrt{c^2 + \frac{Ne^2}{\pi m} \lambda^2}.$$

683. При $\varepsilon(\omega) = 0$, что в случае плазмы дает $\omega = \sqrt{4\pi Ne^2/m}$. Длина волнового вектора k , а с ней и фазовая скорость могут быть какими угодно¹⁾. Групповая скорость $u = d\omega/dk = 0$. Поэтому лучше говорить не о «волне», а просто о колебаниях электрического поля, а также о колебаниях электронов плазмы относительно ионов.

¹⁾ Это утверждение справедливо, если можно пренебречь тепловым движением электронов (средняя скорость теплового движения электрона мала по сравнению со скоростью света c). При учете теплового движения электронов получается зависимость ω от k .

684. Решение. Уравнение колебаний гармонического осциллятора в электрическом поле $E = E_0 e^{i\omega t} : \ddot{r} + \omega_0^2 r = \frac{e}{m} E$ для установившихся колебаний дает $r = \frac{e}{m} \frac{E}{\omega_0^2 - \omega^2}$. Плотность собственно энергии электрического поля:

$$\omega_1 = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{E + E^*}{2} \right)^2 = \frac{E^2}{32\pi} + \frac{EE^*}{32\pi} + \text{компл. сопр.}$$

Плотность потенциальной энергии:

$$\omega_2 = \frac{Nm\omega_0^2}{2} \left(\frac{r + r^*}{2} \right)^2 = \frac{Nm\omega_0^2}{8} (r^2 + rr^*) + \text{компл. сопр.}$$

Плотность кинетической энергии:

$$\omega_3 = \frac{Nm}{2} \left(\frac{\dot{r} + \dot{r}^*}{2} \right)^2 = -\frac{Nm\omega^2}{8} (r^2 - rr^*) + \text{компл. сопр.}$$

Подставляя сюда выражение для r и замечая, что из дисперсионной формулы $\epsilon = 1 + \frac{4\pi Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2}$ следует $\frac{d(\epsilon\omega)}{d\omega} = 1 + \frac{(\epsilon - 1)(\omega_0^2 + \omega^2)}{\omega_0^2 - \omega^2}$, получим для плотности электрической энергии:

$$\omega_e = \frac{\epsilon E^2}{32\pi} + \frac{1}{32\pi} \frac{d(\epsilon\omega)}{d\omega} EE^* + \text{компл. сопр.}$$

Для плотности магнитной энергии имеем обычное выражение, как в недиспергирующей среде.

685. Спектр будет пересечен темными полосами, сужающимися от красного конца его к фиолетовому. Нулевая полоса (т. е. полоса, которой соответствует нулевая разность хода) горизонтальна. При введении стеклянной пластинки полосы становятся наклонными.

686. Наклон полос тем больше, чем больше толщина пластинки, и практически не зависит от дисперсии показателя преломления последней. При переносе пластинки из одного плеча интерферометра в другое наклон меняет знак.

687. Обозначим через y_k расстояние интерференционной полосы k -го порядка от положения нулевой полосы, какое она занимала до введения в плечи интерферометра стеклянной пластинки и слоя паров натрия. До введения пластиинки и паров натрия $y_k = ak\lambda$, где a — постоянная прибора. После введения пластиинки и паров натрия рассматриваемая полоса сместится, и мы получим $y_k = a[k\lambda - (n_{ct} - 1)l_{ct} + (n_{Na} - 1)l_{Na}]$. В вершине крюка $dy_k/d\lambda = 0$, что дает

$$\left(\frac{dn}{d\lambda} \right)_{Na} = -\frac{k}{l_{Na}} + \frac{l_{ct}}{l_{Na}} \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)_{ct}. \quad (687.1)$$

Порядок интерференции $k = l_{\text{ст}} (n_{\text{ст}} - 1) / \lambda$ велик (несколько тысяч), а потому последним слагаемым в формуле (687.1) можно пренебречь.

$$688. f_0 = \frac{4\pi m c^2}{N_0 e^2 \lambda_0^4} \frac{l_{\text{ст}}}{l} (n_{\text{ст}} - 1) (\Delta \lambda)^2.$$

689. 1) Если не учитывать движения осциллятора как целого, то частота рассеянного света будет ω . 2) Будет излучаться свет частоты ω_0 .

690. Решение. При угле Брюстера преломленный луч перпендикулярен к отраженному, колебания электронов в молекулах среды перпендикулярны к направлению преломленного луча и, значит, совпадают с направлением, в котором должен лежать отраженный луч (предполагается, что молекулы изотропны). Поэтому в направлении отраженного луча свет, поляризованный перпендикулярно к плоскости падения, излучаться не может.

691. Если свет, поляризованный перпендикулярно к плоскости падения, падает под углом Брюстера, то индуцированные дипольные моменты молекул среды хотя и параллельны направлению отраженного луча, но дипольные моменты молекул слоя не параллельны этому направлению. Поэтому молекулы слоя излучают в рассматриваемом направлении, что и ведет к появлению отраженного света.

692. Для возможности отражения недостаточно, чтобы молекулы среды излучали в направлении отражения. Для этого необходимо еще, чтобы их излучения были когерентны или, по меньшей мере, частично когерентны. Это не соблюдается для изотропных сред, построенных из анизотропных молекул, так как условием изотропии таких сред является полная хаотичность в ориентации анизотропных молекул. Пока выполняется это условие, среда ведет себя так, как если бы ее молекулы были бы изотропны. Флуктуации анизотропии, которые всегда имеют место, приводят к дополнительному рассеянию света во всех направлениях, но правильного отражения не дают. Оно получилось бы, если бы нарушить в какой-либо мере хаотичность в ориентации молекул. По всей вероятности, это имеет место для мономолекулярного слоя приграничных анизотропных молекул среды. Такого рода ориентация, возможно, является одной из причин отступлений от формул Френеля при отражении света от совершенно чистых поверхностей жидкостей.

693. Решение. Поле, излучаемое всей средой

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 - \dots, \quad (693.1)$$

где слагаемые представляют поля излучения отдельных слоев. При строгой однородности волны поляризаций $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}r)}$ члены ряда (693.1) равны по абсолютной величине, и его сумма не имеет определенного значения. В действительности волна поляризации имеет

передний фронт, перед которым волновое возмущение отсутствует. Таким образом, в действительности ряд (693.1) содержит конечное число членов и неопределенность исчезает. Чтобы вычислить его сумму, вообразим, что первый слой вместе с излучаемым им полем удален, а оставшаяся среда сдвинута вверх на толщину слоя l .

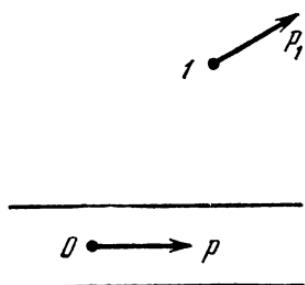


Рис. 151.

Вообразим, далее, что фазы всех дипольных моментов среды изменены на одну и ту же величину таким образом, что диполи, оказавшиеся после смещения на границе раздела, получили те же фазы, какие имели бы в тот же момент времени удаленные с этой границы диполи первого слоя. Ввиду медленности изменения членов ряда (693.1) и тождественности слоев ясно, что в результате этих воображаемых

операций поле излучения вне среды практически остается без изменения. Но теперь оно может быть представлено в виде $E = E_2 - E_3 + \dots$. Вместе с (693.1) это дает $E = 1/2 E_1$. Для толщины слоя не трудно получить $l = \pi / (k_z + f_z)$. (Мы направили ось Z в сторону среды перпендикулярно к границе раздела.) Волновой вектор в вакууме f определяется компонентами:

$$f_x = k_x, \quad f_y = k_y, \quad f_z = + \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}.$$

694. Решение. Разобъем воображаемую среду, заполняющую верхнее полупространство, на слои толщины $L = \pi / (k_z - f_z)$. Тогда плоские волны, излучаемые в нижнее полупространство соседними слоями, будут иметь противоположные фазы. Рассуждая, как в предыдущей задаче, найдем, что поле излучения всей воображаемой среды эквивалентно половине поля излучения ее первого слоя. Если электрический вектор (а следовательно, и вектор P) перпендикулярен к плоскости падения, то для отношения комплексных амплитуд отраженной и падающей волн получим

$$\frac{R_s}{E_s} = - \frac{l}{L} = \frac{f_z - k_z}{f_z + k_z} = \frac{\cos \varphi - n \cos \psi}{\cos \varphi + n \cos \psi}.$$

Вторая формула Френеля получается аналогично. Необходимо лишь учесть зависимость излучения от его направления. Играет роль только компонента вектора P , перпендикулярная к направлению излучаемой волны, параллельная компонента излучения не дает.

695. Решение. 1) Пусть диполь p помещен в точке O внутри щели (рис. 151). Обозначим поле такого диполя через E' . Возьмем второй диполь p_1 , помещенный в точке I вне щели на таком рас-

стоянии от нее, которое велико по сравнению с λ . Поле этого диполя обозначим через E_1 . Тогда по теореме взаимности

$$pE_1(0) = p_1E'(I). \quad (695.1)$$

Если бы щели не было, то вместо этого соотношения мы имели бы

$$pE_1^0(0) = p_1E'(I), \quad (695.2)$$

где E_1^0 — поле диполя I при отсутствии щели. Поле E_1^0 в окрестности точки O может считаться однородным. Поэтому в силу непрерывности тангенциальных компонент электрического поля левые части выражений (695.1) и (695.2) равны. Следовательно, $p_1E'(I) = p_1E(I)$, откуда в силу произвольности вектора p_1 и положения точки I получаем вне щели $E' = E$.

Таким образом, щель не влияет на излучение диполя, т. е. на поле в его волновой зоне.

В случае 2) соотношения (695.1) и (695.2) остаются в силе. Однако теперь ввиду непрерывности нормальных компонент вектора индукции $\epsilon'E_1(0)p = \epsilon E_1^0(0)p$, где ϵ' — диэлектрическая проницаемость вещества, заполняющего щель. Поэтому $\epsilon'p_1E'(I) = \epsilon p_1E(I)$, откуда $E' = (\epsilon/\epsilon')E$. В частности, если $\epsilon' = 1$, то $E' = \epsilon E$, т. е. напряженность поля диполя p в его волновой зоне возрастает в ϵ раз.

696. 1) $E' = E$; 2) $E' = \frac{2\epsilon}{\epsilon' + \epsilon}E$. В обоих случаях поле E' не зависит от положения диполя относительно оси полости. Решение сводится к электростатической задаче о диэлектрическом цилиндре во внешнем однородном поле.

697. $E' = \frac{3\epsilon}{\epsilon' + 2\epsilon}E$. Поле E' не зависит от положения диполя относительно центра полости.

698. $I(v) = I_0 \exp \left\{ - \left(\frac{v - v_0}{\delta/2} \right)^2 \right\}$, где $\frac{\delta}{2} = \frac{v_0}{c} \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$ (R —

— газовая постоянная, μ — относительная молекулярная масса газа).

Решение. Вероятность того, что скорость молекулы газа в направлении наблюдателя лежит в интервале $(v, v+dv)$, равна

$$dw(v) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT}} \exp \left\{ - \frac{\mu v^2}{2RT} \right\} dv.$$

Молекула со скоростью v излучает, с точки зрения неподвижного наблюдателя, свет частоты $v = v_0(1 + v/c)$. Отсюда вероятность того, что молекула излучает свет с частотой от v до $v+dv$:

$$dw(v) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT}} \exp \left\{ - \frac{\mu}{2RT} \frac{c^2}{v_0^2} (v - v_0)^2 \right\} \frac{c}{v_0} dv.$$

Так как излучения различных молекул газа некогерентны, то $I(v) dv$ — интенсивность света с частотой в интервале $v, v+dv$ пропорциональна $d\omega(v)$, откуда нетрудно получить приведенное в ответе выражение.

699. $\Delta\lambda = \frac{\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{2RT}{A}} \sqrt{\ln 2} \approx 0,042 \text{ \AA}$, где A — масса грамм-атома водорода.

700. $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{vn}{c} \cos \vartheta$, где ϑ — угол между направлением наблюдения и направлением движения.

701. Решение. Уравнения движения упруго связанного электрона в магнитном поле (поле H по оси OZ):

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = + \frac{e}{mc} \dot{y} H, \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = - \frac{e}{mc} \dot{x} H, \quad \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0.$$

Вводя величину $\eta = x + iy$, легко показать, что

$$\eta = e^{i\omega_L t} \{ A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t} \}$$

есть общий интеграл двух первых уравнений (здесь учтено, что $\omega_0 \gg \omega_L$, и поэтому положено $\sqrt{\omega_0^2 + \omega_L^2} = \omega_0$). Наличие множителя $e^{i\omega_L t}$, где $\omega_L = eH/(2mc)$, показывает, что в магнитном поле на колебания накладывается вращение с частотой ω_L .

702. Приращение кинетической энергии равно

$$\Delta K = \frac{m(\omega_0 \pm \omega_L)^2 r^2}{2} - \frac{m\omega_0^2 r^2}{2} \approx \pm m\omega_0 \omega_L r^2,$$

где $\omega_L = eH/(2mc)$ — ларморова частота, $\omega_L \ll \omega_0$. Изменение K происходит за счет работы вихревого электрического поля, возникающего при включении магнитного поля.

703. Решение. Уравнение движения частицы имеет вид $m dv/dt = eE$, где E — напряженность электрического поля. Действие лоренцевой силы не нужно учитывать, так как она нормальна к траектории и компенсируется силами, обеспечивающими движение частицы по окружности с заданным радиусом r . По закону индукции $2\pi r E = -\frac{\pi r^2}{c} \frac{dH}{dt}$. Комбинируя эти уравнения, после интегрирования

получаем $m(v - v_0) = -\frac{er}{2c}(H - H_0)$. Если начальное значение напряженности поля $H_0 = 0$, то изменение угловой скорости $(v - v_0)/r = \omega_L = -eH/(2mc)$.

704. Поляризация волны будет круговой — правой или левой. При правой поляризации (показатель преломления n_+) электрический вектор волны вращается по часовой, а при левой (показатель преломления n_-) — против часовой стрелки, если смотреть против на-

правления распространения волны. Для n_{\pm} получаем

$$n_{\pm}^2 = 1 - \frac{4\pi Ne^2/m}{\omega (\omega \mp \omega_H)},$$

где N — концентрация электронов, а $\omega_H = |eH/mc|$ — циклотронная частота.

705. $7^{\circ}14,7'$.

706. $R = 780$ угл.мин/(Э.см).

707. $R = \frac{\alpha}{lH} = \frac{\pi}{\lambda_0} (n_- - n_+) \frac{1}{H}$, где α — угол поворота плоскости поляризации, λ_0 — длина волны света в вакууме и H — напряженность магнитного поля.

Решение. Пусть внешнее магнитное поле \mathbf{H} перпендикулярно к плоскости чертежа и направлено к читателю. В том же направлении распространяется линейно-поляризованная волна. Разложим эту волну на две компоненты, поляризованные по правому и по левому кругу. В начальный момент электрические векторы этих компонент параллельны и направлены вдоль OA (рис. 152). После прохождения слоя вещества толщиной l электрический вектор \mathbf{E}_- первой компоненты повернется по часовой стрелке на угол $\varphi_- = 2\pi l/\lambda_- = (2\pi l/\lambda_0) n_-$. Электрический вектор \mathbf{E}_+ второй компоненты повернется против часовой стрелки на угол $\varphi_+ = (2\pi l/\lambda_0) n_+$. Результирующий вектор \mathbf{E} обеих компонент делит угол между \mathbf{E}_+ и \mathbf{E}_- пополам и определяет новое направление плоскости колебаний. Эта плоскость оказывается повернутой относительно исходного положения на угол α . Вращение плоскости колебаний (и перпендикулярной к ней плоскости поляризации) считается положительным, когда оно происходит по часовой стрелке, если смотреть против направления распространения света. Таким образом, угол поворота плоскости колебаний равен

$$\alpha = \frac{\varphi_- - \varphi_+}{2} = \frac{\pi l}{\lambda_0} (n_- - n_+).$$

Сопоставляя это выражение с соотношением $\alpha = RlH$, получаем результат, приведенный в ответе.

708. $R = \frac{e}{2mc^2} \lambda_0 \frac{\partial n}{\partial \lambda_0}$, где e — заряд электрона (величина отрицательная!), а λ_0 — длина волны в вакууме. Эта формула относится

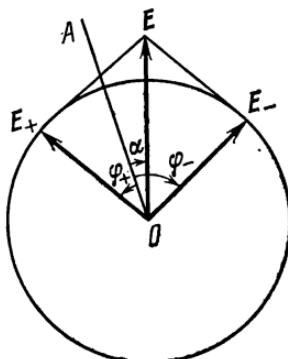


Рис. 152.

к веществам, молекулы которых не имеют постоянного магнитного момента.

Решение. Пусть среда при отсутствии магнитного поля имеет лишь одну линию поглощения, которой соответствует собственная угловая частота ω_0 . Показатель преломления среды определяется дисперсионной формулой и является функцией аргумента $\omega^2 - \omega_0^2$, т.е. $n = n(\omega^2 - \omega_0^2)$. Разложим гармоническое колебание электрона в атоме на три колебания: одно вдоль магнитного поля и два круговых, происходящих в плоскости, перпендикулярной к полю, в противоположных направлениях. Если наложить магнитное поле, то частота кругового колебания, совершающегося против часовой стрелки (если смотреть против направления магнитного поля), будет равна $\omega_0 + \omega_L$. Собственная частота, таким образом, изменилась. Поэтому показатель преломления соответствующей поляризованной по кругу волны будет равен

$$n_+ = n(\omega^2 - (\omega_0 + \omega_L)^2) = n(\omega^2 - \omega_0^2 - 2\omega_0\omega_L - \omega_L^2).$$

Так как частота ω_L прецессии орбиты мала по сравнению с ω_0 и ω , то членом ω_L^2 можно пренебречь и написать

$$n_+ = n(\omega^2 - \omega_0^2) - 2\omega_0\omega_L \frac{\partial n}{\partial \omega^2} = n(\omega^2 - \omega_0^2) - \frac{\omega_0\omega_L}{\omega} \frac{\partial n}{\partial \omega}.$$

Аналогично,

$$n_- = n(\omega^2 - \omega_0^2) + \frac{\omega_0\omega_L}{\omega} \frac{\partial n}{\partial \omega}.$$

Недалеко от линии поглощения можно считать $\omega_0 = \omega$. Это дает

$$n_- - n_+ = 2\omega_L \frac{\partial n}{\partial \omega}.$$

Используя результат решения предыдущей задачи, отсюда легко получить формулу, приведенную в ответе.

709. В прозрачной области $dn/d\lambda$ отрицательно; следовательно, вращение положительное, т. е. происходит по часовой стрелке, если смотреть против направления распространения света. (Свет распространяется по направлению магнитного поля.)

710. $e/m = -5,28 \cdot 10^{17}$ СГСЭ.

711. $\alpha = \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} (n_- - n_+) L = 0,93 \cdot 10^6 \frac{HNL}{\omega^2} \approx 1$ рад. (См. задачи 707 и 713.)

712. $\lambda/\Delta\lambda = 4\pi mc^2/(eH\lambda) = 75\,000$, где e и m — заряд и масса электрона соответственно.

713. Компонента с большей частотой имеет левую круговую поляризацию, а компонента с меньшей частотой — правую.

715. Для того чтобы излучение было почти полностью деполяризовано, нужно, чтобы вращение направления колебаний за «время

жизни» было $\approx \pi/2$, отсюда

$$(eH/2mc) T = \pi/2 \text{ и } H \approx 2\Theta.$$

716. Нет. Постоянное электрическое поле только смещает положение равновесия, но частота гармонических колебаний остается неизменной.

717. На угол $45^\circ + 180^\circ m$ (m — целое число).

718. Направление, в котором пропускается свет, изменится на противоположное.

719. Нет.

720. Свет, излученный телом B (рис. 67) и возвращающийся к нему обратно после отражения от николя N_1 , испытает при прохождении через вращающее вещество дополнительный поворот плоскости поляризации на 45° и поэтому не пройдет через николь N_2 . Испытав в николе N_2 полное внутреннее отражение, этот свет вернется (если поставить еще одно зеркало напротив S_2) к телу A . Приведенное решение парадокса Вина было дано Рэлеем.

721. $\delta = 2\pi ClH^2 \approx 1,88 \cdot 10^{-2}$ рад $\approx 65^\circ$.

722. $n_o - n_e = B\lambda_0 E^2 \approx 0,13 \cdot 10^{-6}$.

723. $\delta = 2\pi BlE^2 \approx 3,53^\circ$.

724. $E \approx 16\,000$ В/см.

725. $I = I_0/2$, где I_0 — интенсивность света, падающего на ячейку.

726. Оптический знак двоякпреломляющей среды, каковой является жидкость или газ, помещенные в электрическое поле, определяется скоростями распространения обыкновенной и необыкновенной волн. Последние зависят от показателей преломления, которые в свою очередь определяются зависимостью оптической поляризуемости среды от направления. Ориентация молекул в поле определяется их результирующим дипольным моментом, равным геометрической сумме постоянного и индуцированного моментов молекулы. Для полярных молекул индуцированные моменты малы по сравнению с постоянными — в этом случае ориентация молекул определяется почти исключительно постоянным моментом (см. задачу 672). Легко видеть, что совпадение направлений постоянного дипольного момента и большой оси эллипсоида поляризуемости приводит к образованию оптически положительного кристалла. Если постоянный дипольный момент направлен по наименьшей из этих осей, то получается оптически отрицательный кристалл. Наименее благоприятным для появления эффекта Керра является тот случай, когда постоянный дипольный момент молекулы направлен приблизительно вдоль средней оси ее эллипсоида поляризуемости. В этом случае может получиться как оптически положительный, так и оптически отрицательный кристалл, в зависимости от соотношений между осями эллипсоида поляризуемости анизотропной молекулы. Чаще всего вещество в этом случае остается почти оптически изотропным.

727. $n_z - n_y = \frac{n_0 - 1}{n_0} \frac{9}{2} \left(\overline{\cos^2 \vartheta} - \frac{1}{3} \right)$, где $\overline{\cos^2 \vartheta}$ — среднее по всем молекулам значение квадрата косинуса угла ϑ между направлением поля и направлением, в котором молекула поляризуется (направлением поляризации).

Решение. Компонента вектора поляризации в направлении вызывающего поляризацию поля E равна $P = N\alpha E \overline{\cos^2 \vartheta}$, где N — число молекул в единице объема, α — поляризуемость полностью анизотропной молекулы (т. е. дипольный момент, вызываемый полем, равным единице и направленным по «направлению поляризации» молекулы). Если оси молекул распределены хаотически, то

$$\overline{\cos^2 \vartheta} = 1/3 \text{ и } \epsilon_0 = 1 + 4\pi N\alpha \overline{\cos^2 \vartheta} = 1 + 4\pi N\alpha/3.$$

Так как $n_0 = \sqrt{\epsilon_0} \approx 1$, то $n_0 - 1 = 2\pi N\alpha/3$. Если распределение молекул зависит от угла ϑ между «направлением поляризации» и осью Z , то для световой волны с электрическим вектором E , направленным по оси Z , имеем

$$\epsilon_z = 1 + 4\pi N\alpha \overline{\cos^2 \vartheta}.$$

Для случая, когда E направлено по оси Y ,

$$\epsilon_y = 1 + 4\pi N\alpha \overline{\sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi} = 1 + 2\pi N\alpha \overline{\sin^2 \vartheta}.$$

Отсюда

$$\epsilon_z - \epsilon_y = n_z^2 - n_y^2 = 3/2(4\pi N\alpha) (\overline{\cos^2 \vartheta} - 1/3),$$

и так как $n_z - n_y \ll n_0$, получаем ответ, приведенный выше.

$$728. B = \frac{n_0 - 1}{5n_0 \lambda_0} \left(\frac{\alpha}{kT} \right).$$

Решение. Вероятность того, что ось некоторой молекулы образует с направлением поля угол, заключенный между ϑ и $\vartheta + d\vartheta$, равна

$$W(\vartheta) d\vartheta = C \exp \left\{ -\frac{U}{kT} \right\} \sin \vartheta d\vartheta,$$

где C — постоянная и U — потенциальная энергия молекулы. В разбираемом случае $U = \frac{p^2}{2\alpha} - pE_0 \cos \vartheta$, где p — индуцированный дипольный момент ($p = \alpha E_0 \cos \vartheta$). Первый член в выражении для U — энергия, затрачиваемая на создание диполя, второй член — энергия диполя во внешнем поле. Имеем

$$\overline{\cos^2 \vartheta} = \frac{\int_0^\pi \cos^2 \vartheta W(\vartheta) d\vartheta}{\int_0^\pi W(\vartheta) d\vartheta} \approx \frac{\int_0^\pi \cos^2 \vartheta \left(1 + \frac{\alpha E_0^2 \cos^2 \vartheta}{2kT} \right) \sin \vartheta d\vartheta}{\int_0^\pi \left(1 + \frac{\alpha E_0^2 \cos^2 \vartheta}{2kT} \right) \sin \vartheta d\vartheta},$$

так как предполагается, что U/kT мало. Интегрируя и подставляя $\cos^2 \vartheta$ в формулу, полученную в предыдущей задаче, находим $n_z - n_y$, а затем и B .

$$729. B = \frac{n_0 - 1}{5n_0 \lambda_0} \left(\frac{p_0}{kT} \right)^2.$$

$$730. \sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2.$$

Решение.

$$m\ddot{x} = eE, \quad \ddot{p} = e\dot{x}, \quad I = \int I(\vartheta) d\Omega = \frac{e^4 \bar{E}^2}{4\pi c^3 m^2} \frac{8\pi}{3}.$$

Средний по времени поток падающей энергии $I_0 = \frac{c}{4\pi} \bar{E}^2$. Отсюда

$$\sigma = \frac{I}{I_0} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = 0,6652 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2.$$

$$731. \sigma_{\text{прот}}/\sigma_{\text{эл}} = (m_{\text{эл}}/m_{\text{прот}})^2 = 29,5 \cdot 10^{-8}.$$

$$732. d\Phi(\vartheta) = I_0 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} \right) d\Omega.$$

$$733. \sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}, \quad I(\vartheta) = I_0 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4 \sin^2 \vartheta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}.$$

$$734. I(\vartheta) = I_0 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4 \sin^2 \vartheta}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \gamma^2},$$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2},$$

$$\sigma_{\omega \approx \omega_0} = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^4/4},$$

$$735. \sum = \frac{8\pi N p l}{3RT} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \approx 2 \cdot 10^{-5}, \text{ где } N \text{ — число Аводадро.}$$

$$736. A = 0,0246; \quad B = 0,106.$$

$$738. d \sum = \frac{V\pi^2 (n^2 - 1)^2}{N\lambda^4} \sin^2 \vartheta d\Omega \text{ (формула Рэлея).}$$

$$739. 1) d\Phi = I_0 \frac{V\pi^2 (n^2 - 1)^2}{N\lambda^4} d\Omega.$$

$$2) d\Phi(\vartheta) = I_0 \frac{V\pi^2 (n^2 - 1)^2}{N\lambda^4} \left(\frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} \right) d\Omega, \text{ где } \vartheta \text{ — угол между направлениями падающего и рассеянного света.}$$

$$740. I_z = I_0 \frac{VN\alpha^2 (2\pi)^4}{5\lambda^4} = \frac{9}{5} I_0 \frac{V\pi^2 (n^2 - 1)^2}{N\lambda^4},$$

$$I_x = I_0 \frac{VN\alpha^2 (2\pi)^4}{15\lambda^4} = \frac{9}{15} I_0 V\pi^2 (n^2 - 1)^2,$$

$$\Delta = I_x/I_z = 1/3.$$

Примечание. Для полностью анизотропных молекул, оси которых распределены хаотически, $n^2 - 1 = 4\pi N\alpha/3$. (См. задачу 727.)

$$741. I_z = \frac{6}{5} I_0 \frac{V\pi^2 (n^2 - 1)^2}{N\lambda^4}, \quad I_x = \frac{9}{15} I_0 \frac{V\pi^2 (n^2 - 1)^2}{N\lambda^4},$$

$$\Delta = I_x/I_z = 1/2.$$

$$742. \Sigma = \frac{8\pi^3 l}{3N\lambda^4} (n^2 - 1)^2 \approx 0,165 \cdot 10^{-1} \text{ см}^2,$$

$$743. \Sigma = 0,0356 \text{ см}^2.$$

Примечание. Использование формулы Рэлея в случае рассеяния в жидкости не приводит к точным результатам.

$$744. 1) S = S_0 e^{-\alpha h} = 1,84 \text{ кал, где } \alpha = 7,94 \cdot 10^{-8} \text{ см}^{-1}.$$

$$2) S = S_0 e^{-\alpha h} = 1,34 \text{ кал, где } \alpha = 4 \cdot 10^{-7} \text{ см}^{-1}.$$

Таким образом, до Земли доходило бы в первом случае примерно 92%, а во втором случае 67% падающей на поверхность атмосферы энергии (сопоставить с задачей 737).

745. 1) При прохождении через раствор световой вектор поворачивается, причем с различным шагом для различных λ . Рассеяние в направлении E отсутствует, поэтому видны цветные винтовые линии. 2) Шаг винта обратно пропорционален концентрации. Зависимость шага от длины волны дается выражением, приведенным в решении задачи 708.

746. Рассеянный свет поляризован эллиптически; большая ось эллипса колебаний перпендикулярна к направлениям распространения падающего и рассеянного света; $\rho = \cos \vartheta$.

747. Электрический вектор линейно-поляризованной компоненты рассеянного света будет перпендикулярен к направлениям распространения падающего и рассеянного света; $I_{\text{поляр}}/I_{\text{неполяр}} = 1/2 \operatorname{tg}^2 \vartheta$.

748. Ртутная линия $\lambda = 2536 \text{ \AA}$ является резонансной. Увеличивая плотность паров ртути, можно добиться, чтобы в рассеянном свете она была погашена (закон Кирхгофа). Если бы длины волн спутников этой линии были такие же, то следовало бы ожидать, что они погасятся также. Если же эти длины волн иные, то спутники гаситься не будут. Мандельштаму и Ландсбергу действительно удалось погасить резонансную линию, в то время как ее спутники сохранились.

$$749. v \approx 1 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-1}.$$

$$750. 4255,1 \text{ и } 4466,7 \text{ \AA}.$$

$$751. 217, 315, 457 \text{ и } 774 \text{ см}^{-1}.$$

$$752. \lambda/\Delta\lambda \approx 715.$$

753. $I_\Phi/I_{\text{кр}} = \exp \{-hv/kT\}$; для различных нормальных колебаний получаем: 0,35; 0,22; 0,11; 0,024.

$$754. \omega_0 = \sqrt{kT/I_0} \approx 10^{13} \text{ см}^{-1}; \text{ здесь } I_0 \text{ — момент инерции молекулы.}$$

$$755. \Delta v = h/(8\pi^2 I c) = 2,2 \text{ см}^{-1}.$$

756. Это колебание не вызывает изменения дипольного момента молекул.

757. Через полпериода перемещения меняют знак, а тензор поляризуемости принимает первоначальное значение, так как оба направления главной оси тензора поляризуемости физически равноправны.

758. Через пол оборота тензор поляризуемости принимает первоначальное значение. Это означает, что период колебания тензора поляризуемости в два раза меньше периода вращения молекулы.

759. Решение. Электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} в среде описывается уравнениями Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} (\epsilon \mathbf{E}) = \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (759.1)$$

Представим это поле в виде суммы падающей \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 и рассеянной \mathbf{E}' , \mathbf{H}' волн:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}', \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'. \quad (759.2)$$

Падающая волна удовлетворяет системе уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = \frac{\epsilon_0}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial t}, \quad \operatorname{div} (\epsilon_0 \mathbf{E}_0) = \operatorname{div} \mathbf{H}_0 = 0. \quad (759.3)$$

При слабой неоднородности напряженность рассеянного поля мала по сравнению с напряженностью поля падающей волны. Подставляя (759.2) в (759.1) и пренебрегая произведениями малых величин \mathbf{E}' , \mathbf{H}' ; $\delta\epsilon$, получим

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}' - \frac{\epsilon_0}{c} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta\mathbf{P}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}' - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t} = 0, \quad (759.4)$$

$$\operatorname{div} (\epsilon_0 \mathbf{E}') = -4\pi \operatorname{div} \delta\mathbf{P}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H}' = 0,$$

где

$$\delta\mathbf{P} = \frac{\mathbf{E}_0}{4\pi} \delta\epsilon. \quad (759.5)$$

Эти уравнения показывают, что среда может рассматриваться как однородная с диэлектрической проницаемостью ϵ_0 . Влияние фактически имеющихся неоднородностей эквивалентно наличию в среде дополнительных источников волн: каждый элемент объема среды dV дает дополнительное излучение как диполь с дипольным моментом $\delta\mathbf{P} dV$. Это дополнительное излучение и есть рассеянный свет. Второе утверждение, о котором говорится в условии задачи, является непосредственным следствием линейности и однородности системы (759.4) как относительно полей \mathbf{E}' , \mathbf{H}' , так и относительно $\delta\epsilon$.

760. Решение. Разобьем среду равноотстоящими плоскостями, перпендикулярными к вектору \mathbf{K} (рис. 153). Выберем расстояние между плоскостями равным $\Lambda = 2\pi/K$. Тогда согласно (759.5) фазы вторичных источников на этих равноотстоящих плоскостях будут одинаковы. Если бы неоднородность была только в слое I , а дальше

среда была однородна, то падающая волна претерпела бы отражение от этого слоя и частично прошла бы дальше. При наличии неоднородности только в слое II мы получили бы другую отраженную волну с той же амплитудой, но иной фазой. При наличии неоднородности в слое III получилась бы третья отраженная волна и т. д. В линейном приближении (см. предыдущую задачу) поле рассеяния всей среды равно простой суперпозиции этих отраженных волн.

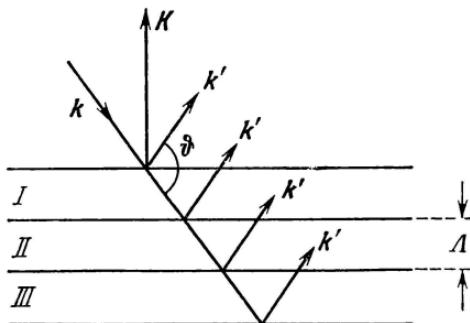


Рис. 153.

Чтобы они не гасили, а усиливали друг друга, необходимо выполнение условия Брегга—Вульфа: $2\Delta \sin(\vartheta/2) = m\lambda$, где ϑ — угол между направлениями падающего и рассеянного излучений, а m — целое число.

Покажем, что $m=1$. Все плоские волны, отраженные различными слоями, складываясь, дают волну вида $E' = A'e^{i(\omega t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}')}$. С другой стороны, дополнительная поляризация среды

$$\delta P = \frac{E_0}{4\pi} \delta \epsilon = \frac{aA}{4\pi} e^{i[\omega t - (\mathbf{k} + \mathbf{K}) \cdot \mathbf{r}]}$$

Подставляя эти выражения в предпоследнее уравнение (759.4) и сравнивая показатели, легко получить $\mathbf{k}' - \mathbf{k} = \mathbf{K}$, откуда

$$2\Delta \sin(\vartheta/2) = \lambda. \quad (760.1)$$

Таким образом, при дифракции волны на синусоидальных неоднородностях диэлектрической проницаемости в линейном приближении получается дифракционный спектр только первого порядка.

761. Решение. В линейном приближении $\Delta \epsilon = (d\epsilon/d\rho) \Delta \rho$. Всякая неоднородность плотности, возникшая в среде, является источником звуковых волн. Разложим $\Delta \rho$ в интеграл или ряд Фурье. Тогда для рассеяния в рассматриваемом направлении будут существенны только те акустические волны, волновой вектор \mathbf{K} которых направлен по биссектрисе угла, дополнительного к ϑ (см. рис. 153). Соответствующие им значения $\delta \epsilon$ представляются в виде суммы волн

типа

$$\delta \varepsilon_1 = a_1 e^{i(\Omega t - Kr)} \quad \text{и} \quad \delta \varepsilon_2 = a_2 e^{-i(\Omega t + Kr)}.$$

Им соответствуют векторы дополнительной поляризации среды:

$$\delta P_1 = \frac{E_0}{4\pi} \delta \varepsilon_1 = \frac{a_1 A}{4\pi} e^{i[(\omega + \Omega)t - (k + K)r]},$$

$$\delta P_2 = \frac{a_2 A}{4\pi} e^{i[(\omega - \Omega)t - (k + K)r]},$$

Таким образом, источники рассеянного излучения, а значит и самое рассеянное излучение, будут иметь частоты $\omega + \Omega$ и $\omega - \Omega$ (модуляция световой волны акустической волной). В спектре рассеянного излучения будет наблюдаться дублет с теми же частотами. Это явление называется тонкой структурой линий рэлеевского рассеяния. Смещение частоты равно $\Omega = Kv = (2\pi/\Lambda)v$, где v — скорость звука, а Λ — длина звуковой волны. На основании (760.1)

$$\Omega = \frac{4\pi v}{\lambda} \sin \frac{\theta}{2} = 2\omega n \frac{v}{c} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (761.1)$$

где c — скорость света в вакууме, а n — показатель преломления среды.

Тонкая структура линий рэлеевского рассеяния была предсказана независимо друг от друга Л. И. Мандельштамом и Л. Бриллюэном. Экспериментально явление в жидкостях было обнаружено Е. Гроссом в Ленинграде. Оказалось, что в жидкостях, наряду с двумя смещенными компонентами, наблюдается также и несмещенная компонента. Происхождение несмещенной компоненты было объяснено Ландау и Плачеком. Рассматривая удельный объем жидкости V как функцию давления и энтропии, можно написать

$$\delta V = (\partial V / \partial P)_S \delta P + (\partial V / \partial S)_P \delta S. \quad (761.2)$$

Отсюда видно, что существует два вида флуктуаций удельного объема: одни вызваны флуктуациями давления при постоянной энтропии, другие — флуктуациями энтропии при постоянном давлении. Флуктуации первого типа распространяются в виде акустических волн и ведут к появлению смещенных компонент. Флуктуации второго типа рассасываются посредством теплопроводности, а следовательно, распространяются значительно более медленно, — они и ведут к появлению в рассеянном свете несмещенной компоненты. (См. задачу 762.)

762. Решение. На основании того, что говорилось в решении задачи 761, для искомого отношения можно написать

$$\frac{I_\omega}{I_{\omega-\delta\omega} + I_{\omega+\delta\omega}} = \frac{(\partial V / \partial s)_P^2 \overline{\Delta s^2}}{(\partial V / \partial P)_S^2 \overline{\Delta P^2}} = - \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_P^2 \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_s,$$

где мы воспользовались выражениями для $\overline{\Delta P^2}$ и $\overline{\Delta s^2}$, а также формулой $s_P = T (\partial s / \partial T)_P$. Так как дифференциал удельной энталпии

$di = T ds + V dP$ — полный дифференциал, то $(\partial T / \partial P)_s = (\partial V / \partial s)_P$. Поэтому

$$\frac{I_\omega}{I_{\omega-\delta\omega} + I_{\omega+\delta\omega}} = - \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_s \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_s \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_P \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_P = - \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_s \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P,$$

или, на основании тождества $(\partial T / \partial V)_s (\partial V / \partial s)_T (\partial s / \partial T)_V = -1$,

$$\frac{I_\omega}{I_{\omega-\delta\omega} + I_{\omega+\delta\omega}} = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial s}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_V = \frac{(\partial V / \partial T)_P (\partial s / \partial V)_T}{(\partial s / \partial T)_V}.$$

Рассматривая энтропию s как функцию T и V , получим

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_P = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_V + \left(\frac{\partial s}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P.$$

Окончательно:

$$\frac{I_\omega}{I_{\omega-\delta\omega} + I_{\omega+\delta\omega}} = \frac{(\partial s / \partial T)_P - (\partial s / \partial T)_V}{(\partial s / \partial T)_V} = \frac{c_P - c_V}{c_V}$$

(формула Ландау и Плачека).

763. Пять компонент: одна несмешенная компонента и две пары смещенных компонент, из которых одна пара получается от рассеяния на продольных акустических волнах, а другая — на поперечных.

764. 25 компонент: одна несмешенная и 24 смешенные. Дело в том, что в кристалле в каждом направлении могут распространяться одна продольная акустическая волна и две поперечные. В том же направлении могут распространяться две световые волны, поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях. Каждая из этих световых волн в свою очередь разбивается на две волны при отражении от акустических волн соответствующих направлений распространения. Это и приводит к появлению в рассеянном свете 24 несмешенных компонент. Однако благодаря слабой анизотропии всех исследованных кристаллов эти 24 компоненты обычно группируются в шесть групп по четыре линии в каждой и не разрешаются спектральными приборами. На опыте наблюдаются шесть смешенных компонент.

765. Две пары смешенных компонент. Дело в том, что флюктуации второго типа, о которых говорилось в задаче 761, рассасываются в жидком гелии-II посредством распространения второго звука. Одна пара смешенных компонент получается при рассеянии на волнах обычного, а другая пара — второго звука. Несмешенная компонента не должна получаться. Экспериментально явление не исследовалось.

766. $v = \frac{c}{2n \sin(\theta/2)} \frac{\delta\lambda}{\lambda}; v_{\text{прод}} = 1,8 \cdot 10^8 \text{ см/с} = 18000 \text{ м/с}, v_{\text{попереч}} = 1,1 \cdot 10^8 \text{ см/с} = 11000 \text{ м/с}$. Благодаря большой скорости звука в алмазе тонкую структуру линий рэлеевского рассеяния удается исследовать с помощью призменных спектрографов.

$$767. d \sin \vartheta = \frac{\lambda}{2} \left(m + \frac{1}{2} \right), \text{ где } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \vartheta - \text{угол}$$

между нормалью к отрезку d , лежащей в горизонтальной плоскости, и направлением излучения.

768. В вакууме излучение отсутствует, так как в этом случае электромагнитные волны могли бы быть только поперечными. Ввиду сферической симметрии могут изучаться только чисто продольные волны, распространяющиеся вдоль радиусов. При колебаниях обкладки конденсатора в среде могут возбуждаться, например, продольные акустические и плазменные волны (в плазменных волнах диэлектрическая проницаемость $\epsilon(\omega_0) = 0$).

769. Нет. Дипольный момент совокупности частиц с зарядом e и массой m равен $p = e \sum \mathbf{r}_i$, и его производная по времени постоянна, так как в рассматриваемом случае импульс системы $m \sum \dot{\mathbf{r}}_i$ сохраняется. Дипольное же излучение определяется производной \ddot{p} .

770. Если металл можно считать идеально проводящим (практически это предположение часто справедливо), то электрическое поле в вакууме представляет собой поле заряда e и его электрического изображения — заряда $-e$, расположенного в металле на таком же расстоянии от границы, на каком находится (в вакууме) заряд e . При пересечении зарядом границы как сам заряд, так и его изображение как бы исчезают. Поэтому излучение окажется таким же, как и при остановке (или слиянии) движущихся навстречу друг другу зарядов e и $-e$. Для металлов с конечной, но очень высокой проводимостью наблюдаемая картина качественно весьма близка к картине для идеального проводника.

771. Поле заряда e , находящегося вблизи границы раздела двух любых сред, как и в случае границы металла с вакуумом, можно представить как поле самого заряда и его изображения. Однако заряд изображения зависит от ϵ_1 и ϵ_2 , причем он стремится к нулю при $\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_2$ и к $-e$ при $\epsilon_1 \rightarrow 1$, $\epsilon_2 \rightarrow \infty$ (последний случай эквивалентен случаю идеального зеркала). Отсюда и из ответа к задаче 770 ясно, что переходное излучение возникает при пересечении границы раздела любых сред. Переходное излучение поляризовано так же, как излучение диполя, находящегося на границе раздела, ось которого перпендикулярна к этой границе (предполагается, что частица движется перпендикулярно к границе раздела).

772. Излучение будет иметь место. По своей природе оно представляет собой переходное излучение, так как последнее должно возникать всегда, когда на траектории заряда изменяется параметр $n\mathbf{v}$ (при этом в случае тормозного излучения меняется скорость \mathbf{v} , а для обычного переходного излучения показатель преломления n

изменяется вдоль траектории заряда за счет пространственной неоднородности среды).

773. Картина ясна, если использовать метод изображений и, вместе с тем, учсть особенности излучения релятивистских частиц при их резком торможении (остановке),

774. Для нерелятивистского заряда (точнее, при условии $v \ll c/n$) излучение формируется в зоне с размером $l \sim c/n\omega = \lambda/2\pi$. В общем же случае зона формирования

$$l \approx \frac{vn\lambda/2c}{1 - \frac{v}{c} n(\omega) \cos \theta}, \quad \lambda = 2\pi c/n\omega.$$

Если $d \gg l$, то переходное излучение на обеих границах раздела можно считать независимым (при пренебрежении интерференцией излучения от обеих границ, которая в данном случае приводит к членам, быстро осциллирующим при изменении d , угла наблюдения и т. п., так что интерференционные члены обычно оказываются несущественными). Если $d \ll l$, то излучение от пластинки радикально отличается от излучения от одной границы (достаточно сказать, что при $d \rightarrow 0$ излучение вообще исчезает).

775. Излучение возникает (соответствующий процесс был назван переходным рассеянием), так как под влиянием возмущения в поле заряда появляется также колеблющаяся с частотой ω электрическая поляризация.

776. Диэлектрическая проницаемость плазмы

$$\epsilon = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega^2} = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2.$$

Оscиллятор перестает излучать, если $\omega < \omega_p$, так как в этом случае $\epsilon < 0$, и электромагнитные волны в плазме распространяться не могут ($\omega_p = 4\pi Ne^2/m$ — плазменная частота).

777. В разреженной плазме показатель преломления $n = 1 - \frac{2\pi Ne^2}{m\omega^2}$, групповая скорость $u = cn$ и, таким образом, время запаздывания

$$\tau(\omega) = L \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{c} \right) \approx \frac{2\pi Ne^2 L}{mc\omega^2} = 1,34 \cdot 10^{-3} \left(\frac{NL}{v^2} \right) \text{ с.}$$

778. При наличии центра симметрии эффекты пространственной дисперсии имеют порядок $(a/\lambda)^2 \sim 10^{-7} - 10^{-8}$. Учет пространственной дисперсии приводит к выводу о возможности оптической анизотропии кубических кристаллов. Например, если волновой вектор k направлен по оси куба z , то тензор ϵ_{ij} имеет вид

$$\epsilon_{zz} = \epsilon + \alpha_1 k^2, \quad \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon, \quad \epsilon_{xy} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0.$$

При $k=0$ тензор ϵ_{ij} для кубических кристаллов с центром симметрии вырождается в скаляр $\epsilon\delta_{ij}$.

$$779. n^2 \approx \frac{1 - \omega_0^2/\omega^2}{3\kappa T/mc^2}, \quad v_\Phi \approx \frac{\sqrt{3\kappa T/m}}{\sqrt{1 - \omega_0^2/\omega^2}},$$

$$v_{\text{тр}} \approx \frac{3\kappa T}{m\omega_0} k \approx v_\Phi \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right).$$

780. Решение. Если электрон движется равномерно и слагающая v_n его скорости в направлении нормали к волне совпадает с фазовой скоростью ω/k самой волны, то его движение происходит «в фазе с волной», подобно движению электронов, вступивших в режим ускорения в линейном ускорителе. В этом случае электрон подвергается действию силы (со стороны электрического поля волны), направленной все время либо вперед (в сторону распространения волны), либо назад. В результате должно наблюдаться сильное взаимодействие электрона с волной, сопровождающееся либо поглощением, либо излучением плазменных волн. Так как $v_n = (1/k)(\mathbf{v}\mathbf{k})$, то условие сильного взаимодействия электрона с волной может быть записано в виде

$$(\mathbf{v}\mathbf{k}) = \omega. \quad (780.1)$$

Это — условие черенковского поглощения или излучения плазменных волн.

Частота ω плазменных волн слабо зависит от волнового числа k (см. предыдущую задачу), и поэтому в условии (780.1) ω можно заменить плазменной частотой

$$\omega_0 = \sqrt{4\pi Ne^2/m}.$$

Пусть $v_T \approx \sqrt{\kappa T/m}$ — средняя тепловая скорость электронов в плазме. Если $kv_T \ll \omega_0$, то найдется очень мало быстрых электронов, удовлетворяющих условию (780.1), и поглощение будет слабым. Оно будет сильным при условии $kv_T \geq \omega_0$.

781. Решение. Изменение частоты при рассеянии на свободных электронах определяется эффектом Доплера. Так как тепловая скорость v электронов мала по сравнению со скоростью света, то частота рассеянной волны ω связана с частотой падающей волны соотношением

$$\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} = \omega_0 - \mathbf{k}_0\mathbf{v}, \quad \text{или} \quad \omega - \omega_0 = \mathbf{v}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) = \mathbf{v}\mathbf{q},$$

где \mathbf{k} и \mathbf{k}_0 — волновые векторы рассеянной и падающей волн, $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}_0| = \omega/c$, $|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| = 2(\omega/c) \sin(\theta/2)$ (θ — угол рассеяния).

Разделим электроны на группы с одинаковыми компонентами скорости v_q в направлении вектора \mathbf{q} . Каждая из этих групп будет вызывать определенный додлеровский сдвиг частот. Если $f(v_q)$ — нормированная функция распределения, то число электронов в группе

dN равно

$$dN = N f(v_q) dv_q.$$

Сечение рассеяния для этой группы электронов равно

$$\sigma_{\omega} d\omega = \sigma_e N f(v_q) dv_q = \sigma_e N f\left(\frac{\omega - \omega_0}{q}\right) \frac{d\omega}{q},$$

где σ_e — сечение рассеяния одного электрона и N — число всех электронов. Для максвелловского распределения по скоростям

$$\sigma_{\omega} = \frac{\sigma_e N}{q} \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{m}{2kT} \left(\frac{\omega - \omega_0}{q} \right)^2 \right\}.$$

782. Решение. 1) Наблюдатель видит отдельные вспышки излучения, следующие друг за другом через равные промежутки времени $T^* = 2\pi/\omega_H^*$, где $\omega_H^* = \frac{eH}{mc} \frac{mc^2}{\mathcal{E}}$.

2) Длительность вспышки $\Delta t \approx \Delta t' (1 - v/c) \sim \Delta t' (mc^2/\mathcal{E})^2$, где $\Delta t' \sim \frac{1}{\omega_H^*} \theta \sim \frac{1}{\omega_H^*} \frac{mc^2}{\mathcal{E}} = \frac{mc}{eH}$ — промежуток времени, в течение которого электрон движется в направлении наблюдателя (в пределах конуса с углом раствора θ). Множитель $(1 - v/c)$ в выражении для Δt обусловлен эффектом Доплера (импульс сжимается на величину $v \Delta t'$, а поэтому его длительность уменьшается на $v \Delta t'/c$). Спектр состоит из обертонов частоты обращения электрона ω_H^* , но при $\mathcal{E}/mc^2 \gg 1$ практически непрерывен. В частотном спектре импульса длительностью Δt больше всего представлена циклическая частота

$$\omega_{\text{макс}} \sim \frac{1}{\Delta t} \sim \frac{eH}{mc} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^2.$$

Чтобы в этом убедиться, нужно рассмотреть разложение в ряд Фурье импульса, имеющего форму «всплеска» с длительностью Δt , причем поле во всплеске меняет знак (что ясно уже из того, что среднее по времени поле в импульсе равно нулю).

783. Наблюдатель «видит» вспышки излучения, следующие одна за другой через промежутки времени

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_H^*} \left(1 - \frac{v}{c} \cos^2 \alpha \right) \approx \frac{2\pi}{\omega_H^*} \sin^2 \alpha.$$

Длительность вспышки

$$\Delta t \sim \frac{mc}{eH \sin \alpha} \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2,$$

спектр состоит из обертонов частоты $2\pi/\tau \approx \omega_H^*/\sin^2 \alpha$ и имеет максимум на частоте

$$\omega_{\text{макс}} \sim \frac{1}{\Delta t} \sim \frac{eH \sin \alpha}{mc} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^2.$$

Таким образом, если не говорить об изменении времени между вспышками, характеристики спектра отличаются от случая движения по окружности заменой поля H на $H_{\perp} = H \sin \alpha$.

784. Смысъ условия $\alpha \gg \theta$ состоит в том, что каждый импульс можно рассматривать практически независимо от других. Если $\alpha \ll \theta$, то излучение «собирается» со всей траектории и эквивалентно излучению двух гармонических осцилляторов, колеблющихся перпендикулярно к скорости их центров масс и перпендикулярно друг к другу (а также со сдвигом фаз на $\pi/2$).

785. Излучение поляризовано с преобладанием в волне электрического поля E , направленного перпендикулярно к внешнему магнитному полю (вектор E направлен вдоль ускорения излучающего заряда).

786. Интенсивность излучения определяется квадратом модуля фурье-компоненты тока $I = \left| \int j(r) \exp(ikr) dr \right|^2$, $k = 2\pi/\lambda$. Интенсивность $I \sim N$ при $l \gg \lambda$ и $I \sim N^2$ при $l \ll \lambda$. В указанных случаях

$$I = \frac{\sin^2(\pi l/\lambda)}{(\pi l/\lambda)^2} \quad \text{и} \quad I \sim \exp(-\pi^2 l^2/\lambda^2).$$

787. Первоначальная группировка или фазировка не нужна, необходимо лишь существование инверсной заселенности уровней. Усиление спонтанного излучения отдельных частиц происходит при этом за счет индуцированного испускания. В установившемся режиме усиления движение электронов в мазере эквивалентно некоторой сложной совокупности микротоков, существенно меняющихся по фазе на расстояниях порядка длины волны и в этом отношении пропасти между антенным и мазерным механизмами нет.

788. Минимальная скорость $v_{\min} = c/n$, а минимальная энергия $E_{\min} = Mc^2 / \sqrt{1 - (v_{\min}/c)^2}$; подставляя $n = 1 + P \cdot 2,81 \cdot 10^{-4}$, получим $E_{\min} = 100Mc^2 / \sqrt{5,62P}$; здесь M — масса покоя частицы.

789. Решение. Для возникновения излучения необходимо, чтобы $n^2 > 0$, так как в противном случае однородные волны в среде распространяться не могут.

1) Условие возникновения черенковского излучения записывается в виде $c/nv = \cos \theta$, или $n^2 \cos^2 \theta = 1/\beta^2$, где $\beta = v/c$. На рис. 154 приведена кривая, изображающая зависимость величины

$$n^2 \cos^2 \theta = \frac{\epsilon_{\perp} |\epsilon_{\parallel}| \cos^2 \theta}{|\epsilon_{\parallel}| \cos^2 \theta - \epsilon_{\perp} \sin^2 \theta}$$

от угла θ . При $|\epsilon_{\parallel}| \cos^2 \theta - \epsilon_{\perp} \sin^2 \theta > 0$, т. е. при $\tan^2 \theta < |\epsilon_{\parallel}|/\epsilon_{\perp}$, ее ординаты положительны; при $\tan^2 \theta > |\epsilon_{\parallel}|/\epsilon_{\perp}$ — отрицательны. Следовательно, для возникновения излучения необходимо (но не достаточно) выполнение условия $\tan^2 \theta < |\epsilon_{\parallel}|/\epsilon_{\perp}$.

Проведем на том же рисунке горизонтальную прямую с ординатой $1/\beta^2$. Если эта прямая пересекает кривую, то черенковское излучение возможно; если она не пересекает ее, то излучение невозможно. Абсциссы точек пересечения определят угол θ , под которым при заданной скорости v будет наблюдаться черенковское излучение. Так как минимальная ордината равна ε_{\perp} , то условие черенковского излучения запишется в виде $1/\beta^2 > \varepsilon_{\perp}$.

2а) Если возможно нормальное доплеровское излучение с заданной частотой ω , то его направление определится формулой

$$\omega = \frac{\Omega}{1 - \beta n \cos \theta} \quad \text{или} \quad n^2 \cos^2 \theta = \frac{1}{\beta^2} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega} \right)^2.$$

Проведем на рис. 154 горизонтальную прямую с ординатой $\frac{1}{\beta^2} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega} \right)^2$.

Если она пересечет кривую $n^2 \cos^2 \theta$, то излучение возможно; в про-

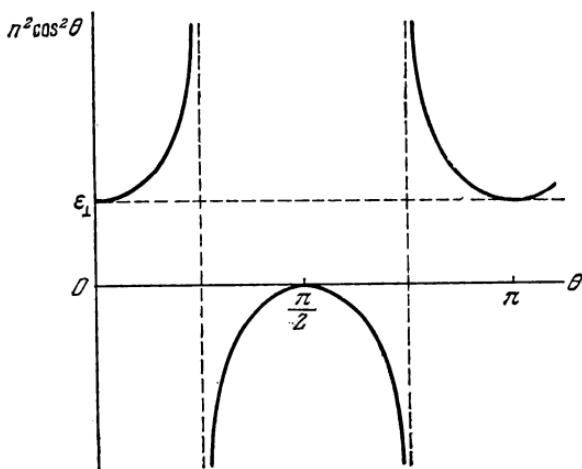


Рис. 154.

тивном случае оно невозможно. Абсциссы точек пересечения определят направление излучения. Нормальное доплеровское излучение возможно при условии

$$\frac{1}{\beta^2} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega} \right)^2 > \varepsilon_{\perp}.$$

2б) Условие аномального доплеровского излучения:

$$\frac{1}{\beta^2} \left(1 + \frac{\Omega}{\omega} \right)^2 > \varepsilon_{\perp}.$$

3) Аномальное доплеровское излучение равномерно движущегося осциллятора будет иметь место, а черенковское излучение заряда,

движущегося с той же скоростью, будет отсутствовать при условии

$$\frac{1}{\beta^2} < \varepsilon_{\perp} < \frac{1}{\beta^2} \left(1 + \frac{\Omega}{\omega}\right)^2.$$

791. Помимо частот ν_1 и ν_2 должны наблюдаться частоты $\nu_1 + \nu_2$ и $\nu_1 - \nu_2$. Суммарную частоту $\nu_1 + \nu_2$ удалось наблюдать на опыте.

792. Внутри однородного, резко ограниченного светового пучка показатель преломления больше чем снаружи на $n_2 E^2$. Вследствие этого все лучи, образующие с граничной поверхностью пучка угол, меньший критического угла, определяемого условием $\cos \theta_{kp} =$

$$= \frac{n_0}{n_0 + n_2 E^2}, \text{ или с учетом неравенства } n_2 E^2 \ll n_0, \text{ — условием } \theta_{kp} =$$

$= E \sqrt{2n_2/n_0}$, будут претерпевать полное отражение.

Световой луч не будет расходиться, если угол дифракционной расходности $\theta_{dif} = 1,22\lambda/D$, где D — диаметр луча, меньше θ_{kp} , т. е. при условии

$$\left(\frac{1,22\lambda}{n_0 D}\right)^2 \leq 2 \frac{n_2}{n_0} E^2.$$

Отсюда

$$P_{nop} = \frac{\pi D^2}{4} \frac{n_0 E^2 c}{4\pi} = \frac{(1,22\lambda)^2 c}{32 n_2}.$$

§ 12. Тепловое излучение

793. Решение. Поместим слой внутрь полости, стенки которой поддерживаются при температуре T . Тогда в состоянии теплового равновесия в полости установится равновесное (черное) излучение. Рассмотрим пучок этого излучения интенсивности I_0 , падающий на слой под углом ϕ (рис. 155). После прохождения через слой интенсивность этого пучка уменьшится до $I_0 \exp\{-\alpha l / \cos \psi\}$, где ψ — угол преломления. Полная интенсивность пучка, выходящего из слоя под углом ϕ , будет, с одной стороны, равна $I + I_0 \exp\{-\alpha l / \cos \psi\}$, где I — интенсивность теплового излучения слоя под углом ϕ . С другой стороны, интенсивность того же излучения должна равняться I_0 , т. е. интенсивности излучения черного тела температуры T . Это дает $I = I_0 (1 - \exp\{-\alpha l / \cos \psi\})$.

794. $I = I_0 (1 - \rho) \frac{1 - e^{-\delta}}{1 - \rho e^{-\delta}}$, где $\delta = \alpha l / \cos \psi$, а ρ — коэффициент отражения на границе слоя. Обе эти величины являются функциями длины волны.

795. $I = I_0 (1 - \rho)$.

796. Интенсивность теплового излучения пластиинки, выходящего слева направо, равна интенсивности соответствующей линейно-поляризованной компоненты излучения абсолютно черного тела температуры T ; интенсивность излучения, выходящего в обратном направлении, равна нулю.

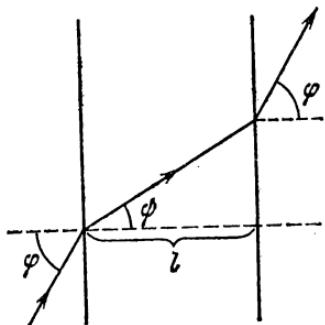


Рис. 155.

799. $S = \frac{4}{3}aT^3V$, $C_V = 4aT^3V$, где a — постоянная в законе Стефана — Больцмана.

800. $u = aT^4$, где a — постоянная в законе Стефана — Больцмана.

801. $VT^3 = \text{const.}$

802. $\sigma \approx 5 \cdot 10^{-5}$ эрг/(с·см²·К⁴). По современным данным $\sigma = (5,6687 \pm 0,0010) \cdot 10^{-5}$ эрг/(с·см²·К⁴).

803. $t \approx 1,64$ ч,

804. $T \approx 400$ К.

805. $u = \frac{4\pi}{c} I$, $M = \frac{c}{4} u$, $M = \pi I$.

806. $dN(v) = \frac{2z}{c} dv$, где c — скорость распространения волн вдоль струны.

807. $dN(v) = \frac{2\pi v z^2}{c^2} dv$, где c — скорость распространения волны по мембране.

808. $dN(v) = \frac{8\pi v^2 V}{c^3} dv$, где c — скорость распространения волн в параллелепипеде.

809. Если $hv \gg kT$, то $u_v \approx \frac{8\pi hv^3}{c^3} \exp\left\{-\frac{hv}{kT}\right\}$ (формула Вина).

Если $hv \ll kT$, то $u_v \approx \frac{8\pi v^2}{c^3} kT$ (формула Рэлея — Джинса).

810. Решение. Плотность энергии черного излучения:

$$u = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{v^3 dv}{\exp\{hv/kT\} - 1} = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx.$$

Входящий сюда интеграл равен

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx &= \int_0^\infty \frac{x^3 e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \int_0^\infty x^3 e^{-x} (1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots) dx = \\ &= 6 \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right) = \frac{\pi^4}{15}, \end{aligned}$$

так как сумма ряда равна $\pi^4/90$. Таким образом, $u = \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} T^4$.

Пользуясь соотношениями, приведенными в ответе к задаче 805,

находим $S = \frac{c}{4} u = \sigma T^4$, где $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} = 5,6687 \cdot 10^{-5}$ эрг/(с·см²·К⁴).

Для определения постоянной α в законе Вина $\lambda_{\max} T = \alpha$ запишем формулу Планка в виде

$$u_v dv = U_\lambda d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{\exp\left\{\frac{hc}{k\lambda T}\right\} - 1}.$$

Задача сводится к отысканию значения λ_{\max} , при котором функция $\lambda^5 \left(\exp\left\{\frac{hc}{\lambda k T}\right\} - 1 \right)$ обращается в минимум. Вводя новую неизвестную $\beta = hc/(kT\lambda_{\max})$ и поступая стандартным способом, приходим к трансцендентному уравнению $e^{-\beta} + \beta/5 - 1 = 0$, корень которого $\beta = 4,96511423$. Поэтому $\lambda_{\max} T = \alpha = hc/(k\beta) = 0,289782$ см·К.

811. Решение. Плотность черного излучения можно представить в виде $u(\lambda, T) = \frac{T^5}{\lambda^5} f(\lambda T)$, где функция f зависит только от произведения λT . В максимуме согласно закону смещения Вина $\lambda T = \text{const}$, а потому $u(\lambda, T) \sim T^5$. То же справедливо для излучательной способности, так как $E(\lambda, T) = \frac{c}{4} u(\lambda, T)$.

812. $T \approx 6000$ К.

813. $\lambda_{\max} \approx 29$ Å.

814. $T = T_r / \sqrt{\mathcal{E}_T}$.

815. Нет, так как испускательная способность всякого тела меньше испускательной способности черного тела.

816. 5370 Вт.

817. $W \approx 1900$ Вт, $T_r = 2700$ К.

818. $T_r = \frac{C_2}{\lambda \ln \{1 + C_1/E_c(T)\lambda^5\}}$, где T_r — яркостная температура для длины волны λ ; T — истинная температура; C_1 и C_2 — постоянные, $E_c(T)$ — испускательная способность серого тела.

819. $\lambda_{\max} T = C_2/5 = 0,28776$ см·К. (Ср. с ответом к задаче 810.)

820. $T < \frac{hc}{\lambda k \ln 100} = \frac{3,11 \cdot 10^7}{\lambda} \approx 4150$ К (для $\lambda = 7500$ Å).

821. $P = \frac{u}{3} = \frac{4\sigma}{3c} T^4 = 4,6 \cdot 10^{17}$ дин/см² = $4,6 \cdot 10^{11}$ атм.

822. $u_v = \frac{8\pi h v^3}{c^3} \exp\left\{-\frac{hv}{kT}\right\}$ (формула Вина).

823. **Решение.** Вероятности поглощения и индуцированного испускания равны между собой. Поэтому \propto пропорционально $N_1 - N_2$, где N_1 и N_2 — числа молекул на нижнем и верхнем уровнях. По формуле Больцмана

$$N_2 = N_1 \exp\left\{-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right\} = N_1 \exp\left\{-\frac{hv}{kT}\right\},$$

откуда

$$N_1 - N_2 = N_1 \left(1 - \exp \left\{ - \frac{hv}{kT} \right\} \right) \text{ и } \kappa(T) = \kappa_0 \left(1 - \exp \left\{ - \frac{hv}{kT} \right\} \right).$$

1) Если $hv/kT \ll 1$, то $\kappa(T) = \kappa_0 hv/kT$, и следовательно, $\kappa(T) \ll \kappa_0$. Этот случай осуществляется в области радиодиапазона. Например, даже при $\lambda = 1$ мм, $T = 300$ К имеем $hv/kT \approx 1/20$.

2) Если $hv/kT \gg 1$, то $\kappa(T) = \kappa_0$. Это имеет место в оптической области спектра. Так, при $\lambda = 5000$ Å, $T = 1500$ К имеем $hv/kT \approx 20$.

824. $T_{\text{эфф}} = T (1 - e^{-\alpha l})$. (См. задачу 794.)

825. По формуле Рэлея—Джинса

$$S = \frac{2\pi kT}{\lambda^2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 = \frac{8,67 \cdot 10^{-17} \cdot T}{\lambda^2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{МГц}) \approx \\ \approx \frac{1,86 \cdot 10^{-15}}{\lambda^2} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{МГц}),$$

где $R = 1,5 \cdot 10^8$ км — радиус земной орбиты, r — «эффективный радиус» короны, который при оценке мы положили равным радиусу фотосфера $r_\Phi = 6,95 \cdot 10^6$ км, λ — в метрах.

826. $I = I_0 e^{-\kappa z}$, где $\kappa = A(N_1 - N_2)$, A — постоянная. Усиление волны возможно, если концентрация частиц на более высоком энергетическом уровне N_2 больше концентрации на более низком энергетическом уровне N_1 . На таком принципе усиления работают современные лазеры и мазеры.

827. $T_{\text{эфф}} \approx \frac{\mathcal{G} \lambda^2}{8ck\tau\Delta\lambda} \approx 10^{17}$ К.

828. Решение. Так как энтропия монохроматического излучения равна нулю, то при преобразовании монохроматического света одной частоты в монохроматический свет другой частоты (это как раз имеет место в данном случае, так как спектры излучения и поглощения линейчаты) изменение энтропии всей системы «вещество + излучение» сводится к изменению энтропии только «вещества» (люминофора). Это изменение при установившемся режиме равно

$$dS = \delta Q/T = (I_a - I_e)/T.$$

По принципу возрастания энтропии $dS \geq 0$, а потому $\rho = I_e/I_a \leq 1$.

829. По определению

$$\rho = \frac{\int h\nu\omega(\nu, \nu') d\nu}{h\nu'} = \frac{\int \nu\omega(\nu) d\nu}{\nu'} = \frac{\text{const}}{\nu'} = \text{const} \cdot \lambda',$$

т. е. в данной области энергетический выход люминесценции является линейной функцией длины волны возбуждающего света.

